Beitrag zur Ermittelung der kritischen Drehzahl von ohne Spinngut laufenden senkrecht stehenden Spinnspindeln

Von der Technischen Hochschule zu Breslau

zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Georg Scheithauer
aus Dambrau

Referent: Prof. Krauß — Korreferent: Prof. Dr. Noether

Tag der mündlichen Prüfung 17. Dezember 1932

Druck der Breslauer Genossenschafts-Buchdruckerei E. G. m. b. H.

1932.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhalt.

I. Einleitung 5

II. Die mathematischen Grundlagen:

1. Analytische Methode zur Ermittelung der kritischen Geschwindigkeit 6
2. Zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung der kritischen Drehzahl 15

III. Die Versuche 20

1. Ringspindeln mit Gleitlager als Hals- und Fußlager . 20
2. Ringspindeln mit Rollenlager als Halslager und Gleitlager als Fußlager 25

IV. Zusammenfassung 40

V. Literaturangabe 41

I. Einleitung.

Die Spinnspindeln, deren kritische Drehzahl im folgenden festgestellt wird, sind Ringspindeln. Sie setzen sich aus drei Hauptteilen zusammen: Der Spindel, der Spindelbüchse und dem Spindelunterteil. Die Spindel mit dem Wirtel ist mittels eines Fußlagers und eines Halslagers in der Spindelbüchse gelagert. Hals- und Fußlager sind meistens als Rollenlager oder als Gleitlager ausgeführt. Die Spindelbüchse sitzt mit einem Spiel von nur 0,1 mm im Spindelunterteil. Eine Feder zwischen Büchse und Unterteil preßt beide gegeneinander. Trotz dieser Feder kann man die Verbindung von Büchse und Unterteil als starr bezeichnen.[1]) Auf die Spindel wirken im Betriebe Schnur- und Fadenzug. Der Schnurzug bringt die Spindel auf die jeweils gewünschte Umdrehungszahl. Im übrigen übt er auf die Spindel genau so wie der Fadenzug eine Kraft aus. Diese Kraft braucht zur Bestimmung der kritischen Drehzahl nicht beachtet zu werden. Sie müßte beachtet werden, wollte man die jeweilige Größe der Schwingungsausschläge feststellen. Letzteres erfolgt jedoch hier nicht.

[1]) Eine Ausnahme hiervon bildet eine neue Ringspindelart, deren Spindelbüchse im Spindelunterteil kugelförmig gelagert ist, und deren Stabilität eine Spiralfeder zwischen Büchse und Unterteil sichert. Die Berechnung der kritischen Drehzahl dieser Ringspindelart erfolgt hier nicht.

II. Die mathematischen Grundlagen.

1. Analytische Methode zur Ermittelung der kritischen Geschwindigkeit.

Zur Vereinfachung der Rechnung wird die Spindel zunächst als eine Welle mit überall gleichem Durchmesser betrachtet. Dafür werden die Schwingungsgleichungen aufgestellt.

Die Welle wird in unendlich viele, unendlich dünne Scheiben zerschnitten gedacht (Abb. 1). Die Bewegung wird relativ zu einem mit der Winkelgeschwindigkeit ω sich drehendem Raum betrachtet.

Es bedeuten:

X, Y, Z die Koordinatenachsen, wobei Z die vertikale Verbindungsgerade der Lagermittel ist, Y und X wagerecht, aber zueinander senkrecht gerichtet sind;

m die Masse der Scheiben für die Längeneinheit;

I_x, I_y die Hauptquerschnitts-Trägheitsmomente;

e_x, e_y die Komponenten der Exzentrizität nach der X- und nach der Y-Richtung;

M das biegende Moment in einem Querschnitt;

S die Schubkraft in einem Querschnitt.

Da die Exzentrität unregelmäßig verteilt ist, nimmt die elastische Linie die Gestalt einer Raumkurve an. Von der Schwere wird abgesehen, da die Welle senkrecht steht. Bei OZ als Drehachse sind für ein Element

$$\text{die Masse} = m \cdot dz \tag{1}$$

und die Fliehkraftkomponenten

$$\left.\begin{aligned} q_x \cdot dz &= m \cdot dz \cdot (x + e_x) \cdot \omega^2; \\ q_y \cdot dz &= m \cdot dz \cdot (y + e_y) \cdot \omega^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Das Gleichgewicht der Kräfte verlangt:

$$S'_x - S_x + q_x \cdot dz = dS_x + q_x \cdot dz = 0$$

oder

$$\frac{dS_x}{dz} = -q_x.$$

Ebenso ergibt sich

$$\frac{dS_y}{dz} = -q_y \qquad (3)$$

Das Gleichgewicht der Momente (für den Elementenmittelpunkt) erfordert:

$$M'_x - M_x + S'_x \cdot \frac{dz}{2} + S_x \cdot \frac{dz}{2} = dM_x + S_x \cdot dz = 0$$

Man erhält

$$\frac{dM_x}{dz} = -S_x$$

Ebenso

$$\frac{dM_y}{dz} = -S_y. \qquad (4)$$

Bekanntlich ist aber für die Biegung:

$$\pm \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{M_x}{I_x \cdot E}.$$

Nach dem angenommenen Biegungssinn gilt das positive Vorzeichen. Also

$$I_x \cdot E \cdot \frac{d^2x}{dz^2} = M_x.$$

Ebenso

$$I_y \cdot E \cdot \frac{d^2y}{dz^2} = M_y. \qquad (5)$$

Aus den Gleichungen 3 und 4 folgt:

$$\frac{d^2}{dz^2} \cdot \left(I_x \cdot E \cdot \frac{d^2x}{dz^2} \right) = q_x$$

oder

$$\frac{d^2}{dz^2} \cdot \left(I_x \cdot E \cdot \frac{d^2x}{dz^2} \right) = m \cdot (x + e_x) \cdot \omega^2.$$

Ebenso

$$\frac{d^2}{dz^2} \cdot \left(I_y \cdot E \cdot \frac{d^2y}{dz^2} \right) = m \cdot (y + e_y) \cdot \omega^2. \qquad (6)$$

Es bestehen für die beiden Hauptachsenrichtungen voneinander

unabhängige kritische Biegungszustände. Zur Vereinfachung der weiteren Rechnung wird die Annahme gemacht:

$$\left.\begin{aligned} &I_x = I_y = I = \text{unveränderlich},\\ &\qquad m = \text{unveränderlich},\\ &e_x = e_y = e_o = \text{unveränderlich}.\\ &\text{Die Schwerpunkte der einzelnen Wellenscheiben}\\ &\text{sollen in einer Ebene liegen.} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Jene Ebene sei die ZOX-Ebene. Es ergibt sich dann die Grundgleichung:

$$I \cdot E \cdot \frac{d^4x}{dz^4} = m \cdot \omega^2 \cdot (x + e_o)\ ^1) \quad (8)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$x = A_1 \cdot e^{kz} + A_2 \cdot e^{-kz} + B_1 \cdot \cos kz + B_2 \cdot \sin kz - e_o\ ^2) \quad (9)$$

mit der Größe

$$k = \sqrt[4]{\frac{m \cdot \omega^2}{I \cdot E}}. \quad (10)$$

Die Konstanten der Lösungsgleichung ergeben sich aus der Lagerungsart der Welle.

Es werden zwei ganz verschiedene Ringspindel-Lagerungsarten behandelt. Bei beiden ist das Fußlager ein Gleitlager (Spurlager). Das Halslager aber ist bei der einen Lagerungsart ein Rollenlager, bei der anderen ein Gleitlager. Die Rollenlager haben eine ganz geringe Lagerlänge (5—6 mm). Die Hals-Gleitlager sind 10 bis 12 mal länger als die Rollenlager. Bei letzteren können sich die Rollen der Biegungslinie der Spindel in etwa anpassen. Bei den Gleitlagern muß sich die Biegungslinie ganz der Lagerrichtung fügen. Dies ergibt, daß man die Ringspindeln mit einem Rollenlager als Halslager wie „eine Welle auf zwei Lagern frei aufliegend mit überragendem Ende" und die Ringspindeln mit einem Gleitlager als Halslager wie „eine eingespannte Welle mit Drehfreiheit" betrachten kann.

---

[1]) Stodala: Dampf- und Gasturbinen.
Hort: Technische Schwingungslehre.

[2]) Wenn die Exzentrizität eine veränderliche Ausbiegung darstellen würde, so könnte die Lösung genau analog aufgestellt werden, nur müßte die dann auftretende Funktion e(z) in der Art einer Fourierreihe entwickelt werden.

A) Die Welle ist auf einer Seite eingespannt und hängt über.

Der Koordinatenanfang fällt mit dem Einspannungspunkt zusammen (Abb. 2). Die elastische Linie genügt dann folgenden Bedingungen:

$$\text{für } z = 0 \text{ muß } x = 0 \text{ und } \frac{dx}{dz} = 0 \text{ sein,}$$

$$\text{für } z = l \text{ muß } \frac{d^2x}{dz^2} = 0 \text{ und } \frac{d^3x}{dz^3} = 0 \text{ sein.}$$

Nun ist:

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1 \cdot e^{kz} + A_2 \cdot e^{-kz} + B_1 \cdot \cos kz + B_2 \cdot \sin kz - e_o \\ \frac{dx}{dz} &= k\,(A_1 \cdot e^{kz} - A_2 \cdot e^{-kz} - B_1 \cdot \sin kz + B_2 \cdot \cos kz) \\ \frac{d^2x}{dz^2} &= k^2(A_1 \cdot e^{kz} + A_2 \cdot e^{-kz} - B_1 \cdot \cos kz - B_2 \cdot \sin kz) \\ \frac{d^3x}{dz^3} &= k^3(A_1 \cdot e^{kz} - A_2 \cdot e^{-kz} + B_1 \cdot \sin kz - B_2 \cdot \cos kz) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Damit ergeben sich die vier Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} e_o &= A_1 + A_2 + B_1 \\ 0 &= A_1 - A_2 + B_2 \\ 0 &= A_1 \cdot e^{kl} + A_2 \cdot e^{-kl} - B_1 \cdot \cos kl - B_2 \cdot \sin kl \\ 0 &= A_1 \cdot e^{kl} - A_2 \cdot e^{-kl} + B_1 \cdot \sin kl - B_2 \cdot \cos kl \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Aus diesen Gleichungen folgt die Nennerdeterminante:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ e^{kl} & e^{-kl} & -\cos kl & -\sin kl \\ e^{kl} & -e^{-kl} & \sin kl & -\cos kl \end{vmatrix} \quad (13)$$

Die Berechnung dieser Determinante gibt:

$$\triangle = -4 \cdot (1 + \cos kl \cdot \mathfrak{Cof}\, kl) \quad (14)$$

Wird die Nennerdeterminante $\triangle$ gleich Null, so ergeben sich unendlich große Schwingungsausschläge. Diese wiederum er-

geben die kritischen Drehzahlen für das System. Die Nennerdeterminante wird gleich Null, wenn

$$\cos kl \cdot \mathfrak{Cof}\, kl + 1 = 0 \qquad \text{ist.} \tag{15}$$

Das ist der Fall, wenn kl die Werte

$$\frac{1{,}194}{2} \cdot \pi;\quad \frac{3}{2} \cdot \pi;\quad \frac{5}{2} \cdot \pi. \quad \ldots \quad \frac{2n+1}{2} \cdot \pi \text{ annimmt.} \tag{16}$$

Gleichung (10) läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$k^4 = \frac{m \cdot \omega^2}{I \cdot E} = \frac{\mathfrak{M} \cdot \omega^2}{I \cdot E \cdot l}$$

wobei $\mathfrak{M} = m \cdot l$ die Gesamtmasse der Welle darstellt.
Aus (16) erhält man

$$k^4 = \left(\frac{1{,}194}{2} \cdot \pi\right)^4 \cdot \frac{1}{l^4}$$

$$k^4 = \left(\frac{2n+1}{2} \cdot \pi\right)^4 \cdot \frac{1}{l^4}.$$

Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{M} \cdot \omega^2}{I \cdot E \cdot l} &= \left(\frac{1{,}194}{2}\,\pi\right)^4 \cdot \frac{1}{l^4} \\ \frac{\mathfrak{M} \cdot \omega^2}{I \cdot E \cdot l} &= \left(\frac{2n+1}{2}\,\pi\right)^4 \cdot \frac{1}{l^4} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \omega_{k1} &= \left(\frac{1{,}194}{2}\,\pi\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{I \cdot E}{\mathfrak{M} \cdot l^3}} \quad 1/\text{sec} \\ \omega_{kn} &= \left(\frac{2n+1}{2}\,\pi\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{I \cdot E}{\mathfrak{M} \cdot l^3}} \quad 1/\text{sec} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

So ergeben sich die kritischen Drehzahlen für die überhängende, einseitig eingespannte Welle mit überall gleichem Durchmesser:

$$\left.\begin{aligned} n_{k1} &= \frac{30}{\pi}\left(\frac{1{,}194}{2}\,\pi\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{I \cdot E}{\mathfrak{M} \cdot l^3}} \quad \text{Umdr./min.} \\ n_{kn} &= \frac{30}{\pi}\left(\frac{2n+1}{2}\,\pi\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{I \cdot E}{\mathfrak{M} \cdot l^3}} \quad \text{Umdr./min.} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

B) Die Welle ruht auf zwei Lagern frei auf und ragt mit einem Ende über.

Der Koordinatenanfang wird in das linke Lagermittel gelegt (Abb. 3). Koordinaten von A sind 0 und x_1 und die von B sind l_1 und x_2 Die Welle gehorcht dann folgenden Bedingungen:

für $z = 0$ sei $x_1 = 0$, $\quad \frac{d^2x_1}{dz^2} = 0$;

für $z = l_1$ sei $x_1 = 0$, $\quad x_2 = 0$, $\quad \frac{dx_1}{dz} = \frac{dx_2}{dz}$, $\quad \frac{d^2x_1}{dz^2} = \frac{d^2x_2}{dz^2}$

für $z = l_1 + l_2 = l$ sei $\frac{d^2x_2}{dz^2} = 0$, $\quad \frac{d^3x_2}{dz^3} = 0$.

Es ist:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cdot e^{kz} + A_2 \cdot e^{-kz} + B_1 \cdot \cos kz + B_2 \cdot \sin kz - e_0 \\ \frac{dx_1}{dz} &= k \cdot (A_1 \cdot e^{kz} - A_2 \cdot e^{-kz} - B_1 \cdot \sin kz + B_2 \cdot \cos kz) \\ \frac{d^2x_1}{dz^2} &= k^2 \cdot (A_1 \cdot e^{kz} + A_2 \cdot e^{-kz} - B_1 \cdot \cos kz - B_2 \cdot \sin kz) \\ \frac{d^3x_1}{dz^3} &= k^3 \cdot (A_1 \cdot e^{kz} - A_2 \cdot e^{-kz} + B_1 \cdot \sin kz - B_2 \cos kz) \\ x_2 &= C_1 \cdot e^{kz} + C_2 \cdot e^{-kz} + D_1 \cdot \cos kz + D_2 \cdot \sin kz - e_0 \\ \frac{dx_2}{dz} &= k \cdot (C_1 \cdot e^{kz} - C_2 \cdot e^{-kz} - D_1 \cdot \sin kz + D_2 \cdot \cos kz) \\ \frac{d^2x_2}{dz^2} &= k^2 \ (C_1 \cdot e^{kz} + C_2 \cdot e^{-kz} - D_1 \cdot \cos kz - D_2 \cdot \sin kz) \\ \frac{d^3x_2}{dz^3} &= k^3 \cdot (C_1 \cdot e^{kz} - C_2 \cdot e^{-kz} + D_1 \cdot \sin kz - D_2 \cdot \cos kz) \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Somit ergeben sich die acht Gleichungen:

$$
\left.\begin{aligned}
e_o &= A_1 + A_2 + B_1 \\
0 &= A_1 + A_2 - B_1 \\
e_o &= A_1 e^{kl_1} + A_2 e^{-kl_1} + B_1 \cdot \cos kl_1 + B_2 \cdot \sin kl_1 \\
e_o &= C_1 e^{kl_1} + C_2 e^{-kl_1} + D_1 \cdot \cos kl_1 + D_2 \cdot \sin kl_1 \\
0 &= A_1 e^{kl_1} - A_2 e^{-kl_1} - B_1 \cdot \sin kl_1 + B_2 \cdot \cos kl_1 - C_1 e^{kl_1} \\
&\quad + C_2 e^{-kl_1} + D_1 \cdot \sin kl_1 - D_2 \cdot \cos kl_1 \\
0 &= A_1 e^{kl_1} + A_2 e^{-kl_1} - B_1 \cdot \cos kl_1 - B_2 \cdot \sin kl_1 - C_1 e^{kl_1} \\
&\quad - C_2 e^{-kl_1} + D_1 \cdot \cos kl_1 + D_2 \cdot \sin kl_1 \\
0 &= C_1 e^{kl} + C_2 e^{-kl} - D_1 \cdot \cos kl - D_2 \cdot \sin kl \\
0 &= C_1 e^{kl} - C_2 e^{-kl} + D_1 \cdot \sin kl - D_2 \cdot \cos kl
\end{aligned}\right\} \quad (21)
$$

Diese Gleichungen führen zu folgender Nennerdeterminante:

$$
\triangle = \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e^{kl_1} & e^{-kl_1} & \cos kl_1 & \sin kl_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & e^{kl_1} & e^{-kl_1} & \cos kl_1 & \sin kl_1 \\
e^{kl_1} & -e^{-kl_1} & -\sin kl_1 & \cos kl_1 & -e^{kl_1} & e^{-kl_1} & \sin kl_1 & -\cos kl_1 \\
e^{kl_1} & e^{-kl_1} & -\cos kl_1 & -\sin kl_1 & -e^{kl_1} & -e^{-kl_1} & \cos kl_1 & \sin kl_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & e^{kl} & e^{-kl} & -\cos kl & -\sin kl \\
0 & 0 & 0 & 0 & e^{kl} & -e^{-kl} & \sin kl & -\cos kl
\end{vmatrix} \quad (22)
$$

Die Lösung der Nennerdeterminante ist:

$$
\left.\begin{aligned}
\triangle = 16 \cdot [2 \cdot &\mathfrak{Sin}\, kl_1 \cdot \sin kl_1 \cdot (1 + \mathfrak{Cos}\, kl_2 \cos kl_2) \\
&- (\mathfrak{Sin}\, kl_1 \cos kl_1 \quad \mathfrak{Cos}\, kl_1 \cdot \sin kl_1) \cdot (\mathfrak{Sin}\, kl_2 \cdot \cos kl_2 \\
&- \mathfrak{Cos}\, kl_2 \cdot \sin kl_2)]
\end{aligned}\right\} \quad (23)
$$

Zur Ermittlung der kritischen Drehzahl muß jetzt untersucht werden, bei welchen Werten von kl_1 und kl_2 $\triangle = 0$ wird. Eines erkennt man alsbald: $\triangle$ wird gleich Null, wenn

$$
\left.\begin{aligned}
&kl_1 \text{ die Werte } \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots \\
&\text{und } kl_2 \text{ die Werte } \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \ldots \text{ annimmt.}
\end{aligned}\right\} \quad (24)
$$

Doch dies ist nur ein Spezialfall.

Zur Auffindung des allgemeinen Falles müssen Rechnungen mit ganz verschiedenen Werten für kl_1 und kl_2 durchgeführt werden. Da nun die Sin- und Cof-Werte für Winkel $> 2\pi$ fast gleich sind, wird zur Erleichterung der Durchrechnung eine Vereinfachung des Determinantenausdruckes vorgenommen. Außerdem wird kl_2 gleich $kl_1\,\mu$ gesetzt. Die Vereinfachung bringt:

$$\begin{array}{c} \mathfrak{Sin}\ kl_1 \quad \text{für } \mathfrak{Cof}\ kl_1 \\ \text{und } \mathfrak{Sin}\ kl_1 \cdot \mu \text{ für } \mathfrak{Cof}\ kl_1 \cdot \mu. \end{array}$$

So ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \triangle = 16 \cdot \mathfrak{Sin}\, kl_1 \cdot [2 \cdot \sin kl_1 (1 + \mathfrak{Sin}\, kl_1\, \mu \cdot \cos kl_1\mu) \\ - (\cos kl_1 - \sin kl_1) \cdot (\cos kl_1\mu - \sin kl_1\mu) \cdot \mathfrak{Sin}\, kl_1\mu] \end{aligned}$$

Oder:

$$\left.\begin{aligned} \triangle = 16 \cdot \mathfrak{Sin}\, kl_1 \cdot \mathfrak{Sin}\, kl_1\mu \cdot \left[\frac{2 \cdot \sin kl_1}{\mathfrak{Sin}\, kl_1\mu} + 2 \cdot \sin kl_1 \cdot \cos kl_1\mu\right. \\ \left. - (\cos kl_1 - \sin kl_1) \cdot (\cos kl_1\mu - \sin kl_1\mu)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Nun ist $\triangle = 0$, wenn

$$\left.\begin{aligned} \frac{2 \sin kl_1}{\mathfrak{Sin}\, kl_1\mu} + 2 \cdot \sin kl_1 \quad \cos kl_1\mu - (\cos kl_1 - \sin kl_1) \\ (\cos kl_1\mu - \sin kl^1\mu) = 0 \text{ ist.} \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Zur Berechnung der Nullstellen für $\triangle$ wird für kl_1 immer ein fester Wert angenommen und für $kl_1\,\mu$ werden der Reihe nach Werte von π bis $4\,\pi$ eingesetzt. So ergibt sich bei einem jeden Wert kl_1 mehrmals $\triangle = 0$. Es zeigt sich, daß die Nullstellen für $\triangle$ bei einer Erhöhung des Wertes von kl_1 um π, 2π, $3\,\pi$, ...stets bei demselben $kl_1\,\mu$ liegen. Abb. 4 bringt die Nullstellen für $\triangle$ in einer Kurve zusammengestellt für alle kl_1 von $2\,\pi$ bis ∞ und bei allen $kl_1\,\mu$ von 2π bis ∞. Da bei $kl_1 < 2\pi$ die Sin- und Cof-Werte sehr verschieden voneinander sind, ist eben genannte Kurve — bei deren Errechnung $\mathfrak{Cof} = \mathfrak{Sin}$ gesetzt wurde — für Werte für kl_1 und für $kl_1\,\mu < 2\,\pi$ nicht zu gebrauchen. Bei kl_1 und $kl_1\,\mu$ von 0 bis 2π sind die Nullstellen für $\triangle$ nach Gleichung (23) zu berechnen. Die strichpunktierten Kurven in Abb. 4 geben diese an. Aus den Kurven von Abb. 4

ergeben sich die Kurven von Abb. 5, wobei $\mu = \frac{kl_2}{kl_1}$ ist oder auch $\mu = \frac{l_2}{l_1}$ darstellt. Ist nun das $\mu = \frac{l_2}{l_1}$ der Welle bekannt, so zeigen die Kurven der Abb. 5 für dieses bestimmte μ bei verschiedenen Werten von

$$a = \frac{kl_1}{\pi} \tag{27}$$

Nullstellen für die Determinanten. Diese führen zur Ermittelung der kritischen Geschwindigkeiten der Welle. Gleichung (10) läßt sich wie folgt schreiben:

$$k^4 = \frac{m \cdot \omega^2}{I \cdot E} = \frac{m \;\; \omega^2 \cdot l_1 (1+\mu)}{I \cdot E \;\; l_1 (1+\mu)} = \frac{\mathfrak{M} \cdot \omega^2}{I \cdot E \cdot l_1 (1+\mu)}$$

wobei $l_1 + l_2 = l_1 + l_1\mu = l_1 (1+\mu)$ ist und $\mathfrak{M} = m \cdot (l_1 + l_2)$ die Gesamtmasse der Welle darstellt.

Aus (27) erhält man:

$$k^4 = \frac{a^4 \cdot \pi^4}{l_1^{\,4}}.$$

So folgt:

$$\frac{\mathfrak{M} \cdot \omega^2}{I \cdot E \cdot l_1 (1+\mu)} = \frac{a^4 \cdot \pi^4}{l_1^{\,4}}. \tag{28}$$

Daraus ergeben sich die kritischen Winkelgeschwindigkeiten

$$\omega_{ka} = a^2 \;\; \pi^2 \;\; \sqrt{\frac{I \cdot E \cdot (1+\mu)}{\mathfrak{M} \cdot l_1^{\,3}}} \quad 1/\text{sec.} \tag{29}$$

Und daraus die kritischen Drehzahlen für eine auf zwei Lagern frei aufliegende Welle mit überragendem Ende und überall gleichem Durchmesser

$$n_{ka} = \frac{30}{\pi} \cdot a^2 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{I \cdot E \cdot (1+\mu)}{\mathfrak{M} \cdot l_1^{\,3}}} \quad \text{Umdr./min.} \tag{30}$$

Beispiel:

Masse der Welle: $l = 34{,}6$ cm $\quad I = 0{,}01077$ cm^4
$l_1 = 11{,}0$ cm $\quad E = 2200000$ kg/cm^2
$l_2 = 23{,}6$ cm $\quad \mathfrak{M} = 0{,}000102$ kgsec^2/cm
$r = 0{,}342$ cm $\quad \mu = 2{,}145$

Nach den Kurven der Abb. 5 ist für $\mu = 2{,}145$ $\triangle = 0$ bei $kl_1 = 0{,}247\,\pi$; $= 0{,}64\,\pi$; $= 1{,}03\,\pi$; $= 1{,}21\,\pi$; . . .
Es ist also

$$n_{k_1} = \frac{30}{\pi} \cdot 0{,}247^2 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}01077 \cdot 2200000 \cdot 3{,}145}{0{,}000102 \cdot 1331}}$$

$$= 4260 \text{ Umdr./min.}$$

$$n_{k_2} = \frac{30}{\pi} \cdot 0{,}64^2 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}01077 \cdot 2200000 \cdot 3{,}145}{0{,}000102 \cdot 1331}}$$

$$= 28600 \text{ Umdr./min.}$$

Auf den vorhergehenden Seiten wurden die kritischen Drehzahlen bestimmt für Spindeln mit überall gleichem Durchmesser, d. h. mit stets gleichbleibendem Trägheitsmoment. Die Spindeln der Ringspindeln haben aber vom Fuß bis zur Spitze ganz verschiedenen Durchmesser. Setzen sich die Spindeln aus zylindrischen Teilen zusammen, so unterteilt man sie so, daß ein jeder dieser Teile einen konstanten Durchmesser hat, und wendet dann für die Berechnung der kritischen Drehzahlen die obigen Differentialgleichungen an. Jeder Durchmesserwechsel muß vier neue Endbedingungen ergeben und vermehrt damit die Gleichungen zur Konstantenbestimmung um vier. Die Rechnung wird dadurch aber sehr schwierig, zumindest erfordert sie sehr viel Zeit. Fast undurchführbar aber wird diese genaue Berechnung der kritischen Drehzahl, wenn wie es in Wirklichkeit der Fall ist der Spindeldurchmesser über die ganze Spindellänge ein anderer ist.

2. Zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung der kritischen Drehzahl.

Da die genaue rechnerische Bestimmung der kritischen Drehzahl der Ringspindeln sehr schwierig ist, wird zur Ermittelung dieser Drehzahl ein Näherungsverfahren verwandt. Es werden behandelt

A) die Ringspindeln, die ein Gleitlager als Hals- und Fußlager haben.

Die rotierende Spindel wird in einzelne Teile zerlegt gedacht. In Übereinstimmung mit den Randbedingungen (hier wie bei der

einseitig eingespannten, überhängenden Welle) wird eine Anfangsdurchbiegung angenommen oder dafür die statische Durchbiegung ermittelt. Der Schwerpunkt eines jeden Spindelteiles im Spindelmittel angenommen hat also eine Durchbiegung x_{01}, x_{02} . . . (Abb. 6). Die Masse der einzelnen Spindelteile sei m_1, m_2. . ., die Winkelgeschwindigkeit ω_0 Die Fliehkraft der Teile ist gleich $m_1 x_{01} \omega_0^2$, $m_2 x_{02} \omega_0^2$. . . . . Mit den Fliehkräften wird die Spindel belastet gedacht. Diese Kräfte ergeben eine Biegungslinie mit den Ordinaten x_{11}, x_{12} . . . Die durch die Fliehkraftbelastung erhaltenen Durchbiegungen x_{11}, x_{12}. . . werden den angenommenen Durchbiegungen x_{01}, x_{02} . . . proportional sein, wenn die Form der angenommenen Biegungslinie der Wirklichkeit entspricht. Die kritische Geschwindigkeit ergibt sich dann aus der Gleichung:

$$\omega_k = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{x_0}{x_1}} \quad 1/\text{sec} \; ^1) \qquad (31)$$

Denn, wenn bei der Fliehkraftsberechnung für ω_0 ω_k gesetzt wird, verändern sich die Fliehkräfte im Verhältnis $\frac{x_0}{x_1}$ und damit auch die Durchbiegungen x_{11}, x_{12} . . . im Verhältnis $\frac{x_0}{x_1}$. Das ergibt, daß die Ordinaten der durch die Fliehkraftbelastungen erhaltenen Biegungslinie und die Ordinaten der angenommenen Biegungslinie gleich groß werden, die beiden Kurven sich also decken. Gleichheit dieser beiden Biegungslinien bedeutet aber, daß die Fliehkräfte bei einer Geschwindigkeit ω_k den elastischen Kräften der Spindel das Gleichgewicht halten. Dies ist nur bei der kritischen Geschwindigkeit möglich. So ist ω_k die kritische Geschwindigkeit der Welle.

Sind die Ordinaten der angenommenen Biegungslinie denen der aus der Fliehkraftbelastung zeichnerisch ermittelten Biegungslinie nicht proportional, so muß das Verfahren wiederholt werden, indem die vorhin aus der Fliehkraftbelastung zeichnerisch ermittelte Biegungslinie als zweite Annahme gelten gelassen wird.

---

[1]) Timošenko-Lessels: Schwingungsprobleme der Technik.
Stodola: Dampf- und Gasturbinen.
Hort: Technische Schwingungslehre.
„ : Die Differentialgleichungen des Ingenieurs.
Borowicz; Beitrag zur Berechnung der kritischen Geschwindigkeiten von zwei und mehrfach gelagerten Wellen.

Bei den

B) Ringspindeln mit einem Rollenlager als Halslager und Gleitlager als Fußlager

erfolgt die Ermittelung der kritischen Geschwindigkeit im wesentlichen genau so wie bei den Ringspindeln mit einem Gleitlager als Hals- und Fußlager. Die Randbedingungen entsprechen hier den Bedingungen für eine Welle auf zwei Lagern frei aufliegend mit überhängendem Ende. Es ist aber zu beachten, daß die Schwingungslinie nicht der statischen Durchbiegung entspricht. Der Spindelteil zwischen den Lagern und der überhängende Teil schwingen entgegengesetzt. Will man die Anfangsdurchbiegung nicht annehmen, sondern dafür die ermittelte statische Durchbiegung setzen, so muß man einige Annahmen machen. Man nimmt erstens an, daß das überhängende Ende gewichtslos und unbelastet ist, und stellt mit dieser Annahme für die Spindel die statische Durchbiegung fest. Dann nimmt man an, daß der Teil zwischen den Lagern gewichtslos und ohne Last ist und daß alle Kräfte am überhängenden Teile in genau entgegengesetzter Richtung wirken. So erhält man zwei Biegungslinien, die man zu einer vereinigt (Abb. 7). Dieser Biegungs- genauer Schwingungslinie entnimmt man die Werte x_0 und berechnet für eine Winkelgeschwindigkeit ω_0 die Fliehkräfte. Dann bestimmt man die Durchbiegungen x'_{11} und x'_{12} für die Spindel unter der Einwirkung der Fliehkräfte auf den Spindelteil zwischen den Lagern, nachher die Durchbiegungen x''_{11} und x''_{12} der Spindel unter dem Einfluß der entgegengesetzt wirkend angenommenen Fliehkräfte auf das überragende Spindelstück. Beide Durchbiegungen werden addiert und man erhält die Biegungs- genauer Schwingungslinie infolge der Fliehkräfte.

$$x'_{11} + x''_{11} = x_{11}; \qquad -x'_{12} - x''_{12} = -x_{12}$$

Die kritische Geschwindigkeit ist dann:

$$\omega_k = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{x_{01}}{x'_{11} + x''_{11}}} = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{-x_{02}}{-x'_{12} - x''_{12}}} \quad 1/\text{sec.} \quad (32)$$

Die Ausdrücke unter den Wurzeln müssen gleich sein. Es genügt nicht, daß zwischen den Anfangsdurchbiegungen und den aus Fliehkraftbelastung ermittelten Durchbiegungen zwischen den Lagern das Verhältnis $\frac{x_{01}}{x_{11}}$ besteht und beim überragenden Teile das Verhältnis $\frac{x_{02}}{x_{12}}$. Es muß auch sein

$$\frac{x_{01}}{x_{11}} = \frac{x_{02}}{x_{12}} \qquad (33)$$

Ist dies nicht der Fall, so muß z. B. x_{02} geändert werden. Dadurch ändern sich auch im gleichen Maße x''_{11} und x''_{12}. Die Ausdrücke unter den Wurzeln lauten dann:

$$\frac{x_{01}}{x'_{11} + x''_{11} \cdot K} = \frac{-x_{02} \cdot K}{-x'_{12} - x''_{12} \cdot K}. \qquad (34)$$

Hieraus aber läßt sich K bestimmen, um die Gleichheit der Wurzelausdrücke zu erzielen. Es ist:

$$x_{01} \cdot x'_{12} + x_{01} \cdot x''_{12} \cdot K = x_{02} \cdot x'_{11} \cdot K + x_{02} \cdot x''_{11} \cdot K^2$$
$$x_{02} \cdot x''_{11} \cdot K^2 + (x_{02} \cdot x'_{11} - x_{01} \cdot x''_{12}) \cdot K - x_{01} \cdot x'_{12} = 0$$

$$K = \frac{-(x_{02} \cdot x'_{11} - x_{01}\, x''_{12}) \pm \sqrt{(x_{02}\, x'_{11} - x_{01} \cdot x''_{12})^2 + 4\, x_{02} \cdot x''_{11} \cdot x_{01} \cdot x'_{12}}}{2 \cdot x_{02} \cdot x''_{11}} \qquad (35)$$

Zur Ermittelung der Biegungslinien ist die Kenntnis

C) des Mohrschen Satzes zur Bestimmung der elastischen Linie eines gebogenen Balkens

notwendig (siehe hierzu Blatt 1). Die Spindel wird mit den Fliehkräften C belastet gedacht. Aus den Kräften C ergibt sich über den Kräfteplan das Seileck. Durch die Schlußlinie des Seilecks erhält man die Biegungsmomentenfläche. Das Produkt aus Ordinate der Biegungsmomentenfläche und dem Polabstand H des Kräfteplans im Kräftemaßstab gemessen stellen das Biegungsmoment dar. Nun wird der einzelne Spindelteil mit der zu ihm gehörenden Momentenfläche FH kgcm² als Kraft belastet gedacht. Es wird ein zweiter Kräfteplan mit dem Polabstand I E kgcm² entworfen. I ist das Trägheitsmoment der Spindel, E der Elastizitätsmodul. Ist I veränderlich, so wird ein bestimmtes I_0 gewählt und alle Momentenflächen FH werden mit dem Verhältnis $\frac{I_0}{I}$ multipliziert. Sind mehrere Elastizitätszahlen zu beachten, so greift man einen Elastizitätsmodul E_0 heraus und vermehrt alle Momentenflächen um $\frac{E_0}{E}$. So kann $I_0 E_0$ als für alle Teile gleicher Polabstand benützt werden. Da $I_0 E_0$ meist sehr groß ist,

wird als Polabstand $\frac{I_0 E_0}{u}$ gewählt. Es erscheinen dann aber in dem nun zu konstruierenden Seileck die Ordinaten x_1 um u zu groß. Dieses Seileck ist die gesuchte Biegungslinie.

D) Mittleres Trägheitsmoment I_m.

Es ist zu beachten, daß das Trägheitsmoment

$$I = \frac{\pi}{4} \; r^4 \quad cm^4 \tag{36}$$

nicht proportional dem Radius r der Spindel ist. Das wirkliche mittlere Trägheitsmoment I_m für einen konisch verlaufenden Spindelteil von der Länge $l_2 - l_1$ ergibt sich zu:

$$I_m = \frac{\int_{l_1}^{l_2} I \cdot dz}{l_2 - l_1} = \frac{\int_{l_1}^{l_2} \frac{\pi}{4} \cdot r^4 \cdot dz}{l_2 - l_1} \; cm^4, \tag{37}$$

wobei r eine Funktion der Spindellänge z ist.

E) Vergleich des Näherungsverfahrens mit der genauen rechnerischen Ermittelung der kritischen Drehzahl.

Um die Genauigkeit dieses zeichnerischen Näherungsverfahrens zur Ermittelung der kritischen Drehzahlen in Bezug auf die genaue rechnerische Lösung zu prüfen, wurde die kritische Drehzahl einer Welle festgestellt, die schon auf Seite 14 behandelt ist.

Maße der Welle:

$l = 34{,}6$	cm	$I = 0{,}01077$	cm^4
$l_1 = 11{,}0$	cm	$E = 2200000$	kg/cm^2
$l_2 = 23{,}6$	cm	$\mathfrak{M} = 0{,}000102$	$kgsec^2/cm$
$r = 0{,}342$	cm	$\mu = 2{,}145$	

Das Näherungsverfahren ergab die kritische Drehzahl

$$n_k = 4262 \text{ Umdr./min.}$$

Bei der genauen rechnerischen Ermittelung war für diese Welle

$$n_k = 4260 \text{ Umdr./min.}$$

Die beiden Werte stimmen aber sehr genau überein.
Die Länge der einzelnen Wellenteile betrug 3 cm. Je kleiner die einzelnen Wellenteile gewählt werden, desto größer ist die Genauigkeit.

III. Die Versuche.

Das vorstehend entwickelte zeichnerische Verfahren wurde im folgenden zur Ermittelung der kritischen Drehzahl auf einige Ringspindeln angewandt, und an Hand von Versuchen wurde dann geprüft, wie weit die so errechnete kritische Drehzahl mit der Wirklichkeit übereinstimmt.

Abb. 8 zeigt die für die Versuche verwandte Einrichtung. Ein Gleichstromnebenschlußmotor mit großem Drehzahlregelbereich trieb die Ringspindel. Mit Hilfe eines Projektionsapparates wurde das Bild der Spindel stark vergrößert auf einem Schirm wiedergegeben. Die Drehzahlen der Spindel wurden mit einem Stroboskop gemessen.

1. Ringspindeln mit Gleitlager als Hals- und Fußlager.

Ringspindel 1

Die Hauptabmessungen der Ringspindel 1 sind aus Abb. 9 ersichtlich. Das Spiel des Halslagers betrug 0,02 mm. Die Spindel war schon einige Zeit im Betriebe.

a) Die theoretische Ermittelung der kritischen Drehzahl.

(siehe dazu Blatt 1).

Der über das Halslager ragende Spindelteil wurde in 11 Teile geteilt. Für jeden Teil erfolgte Gewichts- und Schwerpunktsbestimmung. Mit dem gewählten Maßstab ergaben die Gewichte G (Gruppe 7) die Momentenfläche A. Es wurde die Größe der einzelnen Teile der Momentenfläche festgestellt (Gruppe 8), mit dem Polabstand — gemessen im Kräftemaßstab — multipliziert (Gruppe 9) und auf das Trägheitsmoment I_0 reduziert (Gruppe 17). Die Momentenflächenteile als Belastung betrachtet ergaben die Ordinaten x_0 (Gruppe 18) der Biegungslinie B. Die Anfangsdurchbiegungen x_0 führten bei einer Winkelgeschwindigkeit ω_0

zu den Fliehkraftswerten C (Gruppe 20). Die Fliehkräfte C als Belastung betrachtet ergaben die Momentenfläche C. Diese auf das Trägheitsmoment I_0 reduziert und ihrerseits als Belastung aufgefaßt, führte zu der Biegungslinie D mit den Einzeldurchbiegungen x_1 (Gruppe 24). Die Durchbiegungen x_1 wurden mit den Durchbiegungen x_0 verglichen. Da das Verhältnis $\frac{x_0}{x_1}$ nicht an allen Stellen das gleiche war, wurden nun die Durchbiegungen x_1 als Anfangsdurchbiegungen betrachtet, dafür die Fliehkräfte C′ berechnet, und auf dieselbe Weise wie vorher die Biegungslinie F mit den Ordinaten x_2 (Gruppe 30) ermittelt. Eine Prüfung stellte überall das gleiche Verhältnis $\frac{x_1}{x_2}$ fest (das scheinbare andere Verhältnis $\frac{x_1}{x_2}$ am Halslager wurde von der Messgrenze bedingt), also die Ähnlichkeit der Form der Biegungslinien D und F. So konnten diese zur Berechnung der kritischen Drehzahl verwandt werden.

Nach der Gleichung

$$\omega_k = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{x_0}{x_1}} = \omega_1 \cdot \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \quad 1/\text{sec.}$$

war die kritische Geschwindigkeit

$$\omega_k = 1000 \cdot \sqrt{1{,}6 \cdot 5{,}5}$$

$$\omega_k = 2966 \quad 1/\text{sec.}$$

Da als Polabstand beim Seileck für die Biegungslinie F nicht $E \cdot I_0$ sondern $\frac{E \cdot I_0}{5{,}5}$ verwandt wurde, ergaben sich die Ordinaten x_2 5,5 mal größer.

Es ergab sich nun die kritische Drehzahl

$$n_k = \frac{30}{\pi} \cdot \omega_k = 28350 \text{ Umdr./min.}$$

b) Das Versuchsergebnis.

Bei der Ringspindel I traten die Erschütterungen auf etwa bei:

Beginn	Maximum	Ende
25 100 Umdr./min	27 100 Umdr./min	28 700 Umdr./min

Nr.	l	r_{1a}	r_{2a}	r_i	V	G	G_z	$G_{ges.}$	Nr.	F	F.H	l'	r'_{1a}	r'_{2a}	r'_i	I	$\frac{I_o}{I_m}$	$F \cdot H \cdot \frac{I_o}{I_m}$
	cm	cm	cm	cm	cm^3	$kg \cdot 10^3$	$kg \cdot 10^3$	$kg \cdot 10^3$		cm^2	$kgcm^2$	cm	cm	cm	cm	cm^4		$kg\,cm^2$
1	0,30	0,8846	0,8830		0,338	2,65	1,64	4,29	a	1,04	0,21	0,20	0,3750	0,375′		0,01553	6,440	1,34
2	1,65	0,8830	0,8562		3,916	30,75		30,75	b	4,25	0,85	0,90	0,8846	0,8700		0,46571	0,215	0,18
3	1,10	0,8562	0,8384		2,482	19,50		19,50	c	5,50	1,10	1,40	0,8700	0,8473		0,42690	0,235	0,26
4	2,00	0,8384	0,8060		3,470	27,25		27,25	d	4,49	0,90	1,45	0,8473	0,8238		0,38292	0,261	0,23
5	0,90	0,8060	0,7914	0,4750	1 162	9,13		9,13	e	3,64	0,73	1,55	0,8238	0,7987	0,4750	0,29992	0,333	0,24
6	2,00	0,7914	0,7589	0,4750	2,358	18,51		18,51	f	2,50	0,50	1,45	0,7987	0,7752	0,4750	0,26224	0,381	0,19
7	2,00	0,7589	0,7265	0,4750	2,049	16,08		16,08	g	2,35	0,47	2,00	0,7752	0,7427	0,4750	0,22059	0,454	0,21
8	2,00	0,7265	0,6941	0,4750	1,753	13,76		13,76	h	1,40	0,28	2,00	0,7427	0,7103	0,4750	0,17879	0,560	0,16
9	2,00	0,6941	0,6616	0,4750	1,470	11,54		11,54	j	0,75	0,15	2,00	0,7103	0,6778	0,4750	0,14280	0,700	0,11
10	2,00	0,6616	0,6292	0,4750	1,200	9,42		9,42	k	0,33	0,07	2,00	0,6778	0,6454	0,4750	0,11055	0,905	0,06
11	1,80	0,6292	0,6000	0,4750	0,861	6,76		6,76	l	0,07	0,01	1,90	0,6454	0,6146	0,4750	0,08388	1,191	0,02
Gr.	1	2	3	4	5	6	7	8	Gr.	9	10	11	12	13	14	15	16	17

G_{ges}: Maßstab: 1 cm = 20 10^{-3} kg

Polabstand H = 0,2 kg

Trägheitsmoment $I_o = 0{,}1000$ cm^4

$F \cdot H \cdot \frac{I_o}{I_m}$: Maßstab: 1 cm = 0,5 kg · cm^2

Nr.	x_o	M_{ges}	C	Nr.	F	F · H	$F H \cdot \frac{I_o}{I_m}$	Nr.	x_1	M_{ges}	C′	Nr.	F	F H	$FH \cdot \frac{I_o}{I_m}$
	cm	$\frac{kg \cdot sec^2}{cm} \cdot 10^6$	kg		cm^2	kg cm^2	kg cm^2		cm	$\frac{kg \cdot sec^2}{cm} \cdot 10^6$	kg		cm^2	kg cm^2	kg cm^2
1	0,03	4,37	0,13	a	0,95	950	6115	1	0,03	4,37	0,131	a	1,19	1190	7660
2	0,30	31,35	9,41	b	4,05	4050	870	2	0,33	31,35	10,340	b	5,04	5040	1083
3	0,75	19,88	14,90	c	5,56	5560	1303	3	0,87	19,88	17,300	c	6,97	6965	1634
4	1,30	27,80	36,15	d	4,86	4860	1270	4	1,52	27,80	42,250	d	6,09	6090	1590
5	2,00	9,31	18,62	e	4,26	4260	1420	5	2,35	9,31	21,880	e	5,31	5310	1770
6	2,68	18,88	50,60	f	3,19	3190	1215	6	3,20	18,88	60,450	f	3,92	3915	1492
7	3,71	16,40	60,85	g	3,20	3200	1450	7	4,52	16,40	74,200	g	3,95	3950	1790
8	4,80	14,02	67,40	h	2,00	2000	1120	8	5,95	14,02	83,500	h	2,55	2550	1428
9	5,97	11,77	70,30	j	1,10	1100	770	9	7,50	11,77	88,300	j	1,35	1350	945
10	7,16	9,61	68,80	k	0,45	450	408	10	9,10	9,61	87,500	k	0,55	550	498
11	8,30	6,88	57,10	l	0,095	95	113	11	10,63	6,88	73,250	l	0,14	143	171
Gr.	18	19	20		21	22	23		24	25	26		27	28	29

Polabstand $\frac{E\ I_o}{u} = \frac{220000}{44000} = 5$ kg · cm^2

Winkelgeschwindigkeit $\omega_o = 1000$ sec^{-1}

C: Maßstab: 1 cm = 50 kg

Polabstand H = 1000 kg

$F \cdot H \cdot \frac{I_o}{I_m}$: Maßstab: 1 cm = 2000 kg · cm^2

Polabstand: $\frac{E\ I_o}{u} = \frac{220000}{11} = 20000$ kg cm^2

Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 1000$ sec.$^{-1}$

C: Maßstab: 1 cm = 50 kg

Polabstand H = 1000 kg

$F H \cdot \frac{I_o}{I_m}$: Maßstab: 1 cm = 2000 kg cm^2

Nr.	x_2	$\frac{x_2}{x_1}$
	cm	
1	0,02	1,50
2	0,21	1,57
3	0,55	1,58
4	0,95	1,60
5	1,47	1,60
6	2,00	1,60
7	2,82	1,60
8	3,72	1,60
9	4,69	1,60
10	5,69	1,60
11	6,65	1,60
Gr.	30	31

Polabstand: $\frac{E\,I_o}{u} = \frac{220000}{5,5} = 40000 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$

Die größten Spindelausschläge, die etwa 1 cm unter der Spindelspitze gemessen werden konnten, betrugen 0,22 mm. Das Ansteigen und Abnehmen der Spindelausschläge zeigt das Diagramm. (Abb. 10).

Der Unterschied zwischen dem errechneten Wert und dem durch den Versuch festgestellten Maximum der kritischen Drehzahl erklärt sich aus den Einspannungsbedingungen für die Spindel.

Ringspindel 2

Ihre Hauptabmessungen ergeben sich aus Abb. 11. Das Lagerspiel des Halslagers konnte nicht festgestellt werden, da das Halslager von der Spindel konisch ausgearbeitet war. Die Spindel war schon viele Jahre im Betriebe.

a) Aus der Rechnung erhielt man für diese Spindel die kritische Drehzahl

$$n_k = 26040 \text{ Umdr./min.}$$

b) Der Versuch ergab für die kritische Drehzahl etwa folgende Zahlen:

Beginn	Maximum	Ende
20800 Umdr./min.	25200 Umdr./min.	——

Das Ausklingen der Schwingungen konnte nicht festgestellt werden, da bei den großen Spindelausschlägen (Abb. 12) eine Zerstörung der Versuchseinrichtung befürchtet werden mußte. Die Ausschläge erreichten — etwa 2 cm unter der Spindelspitze gemessen — eine Weite von etwa 0.8 mm. Der Unterschied zwischen errechneter und durch den Versuch festgestellter kritischer Drehzahl erklärt sich auch hier wieder aus den Einspannungsbedingungen für die Spindel.

2. Ringspindeln mit Rollenlager als Halslager und Gleitlager als Fußlager.

Ringspindel 3.

In Abb. 13 sind die Hauptabmessungen dieser Spindel angegeben. Das Spiel des Rollenlagers betrug 0,02 mm. Diese Spindel war noch nicht im Betriebe verwendet worden.

a) Berechnung der kritischen Drehzahl

(siehe dazu Blatt 2, Kurven A ÷ M).

Die Anfangsdurchbiegungen x_0 wurden nicht angenommen, sondern aus der Gewichtsbelastung berechnet. Die Gewichte G_1 (Gruppe 7) der Spindelteile zwischen Fuß- und Halslager ergaben die Momentenfläche A. Diese mit dem Polabstand multipliziert und auf das Trägheitsmoment I_0 reduziert (Gruppe 15) und als Belastung gedacht führte zur Biegungslinie B mit den Ordinaten x'_0 (bzw. x'_{01} für den Spindelteil zwischen den Lagern und x'_{02} für den überhängenden Spindelteil.) Aus den Gewichten G_2 (Gruppe 7) des überhängenden Teiles der Spindel erhielt man die Momentenfläche C und aus dieser (Gruppe 23) die Biegungslinie D mit den Durchbiegungen x''_0 (bzw. x''_{01} und x''_{02}) . x'_0 und x''_0 wurden im richtigen Verhältnis addiert und ergaben die Anfangsdurchbiegungen x_0 (bzw. x_{01} und x_{02}) (Gruppe 24). Für die

Durchbiegungen x_0 und die Winkelgeschwindigkeit ω_0 errechneten sich die Fliehkraftswerte C (Gruppe 26), davon C_1 für die Teile zwischen den Lagern und C_2 für die des überhängenden Spindelteiles. Die Fliehkraftswerte wurden als Belastungen betrachtet. C_1 führte zu der Momentenfläche E und über diese (Gruppe 29) zur Biegungslinie F mit den Ordinaten x'_1. Ebenso C_2 über Momentenfläche G zur Biegungslinie H mit den Ordinaten x''_1. Im richtigen Verhältnis (x'_1 wurde in einem 200 mal größeren Maßstabe erhalten als x''_1) addiert ergaben x'_1 und x''_1 die Durchbiegungen x_1 (bzw. x_{11} und x_{12}). Da das Verhältnis $\frac{x_0}{x_1}$ an den einzelnen Stellen noch große Unterschiede aufwies, wurde das Verfahren mit x_1 als Anfangsdurchbiegungen wiederholt. Es entstanden die Fliehkraftswerte C'_1 und C'_2 (Gruppe 35). Diese ergaben schließlich die Momentenflächen I und K, diese wieder die Biegungslinien L und M mit x'_2 und x''_2 und letztere endlich x_2 (Gruppe 42). Überall (außer an den Lagern) zwischen Hals- und Fußlager war das Verhältnis $\frac{x_{11}}{x_{21}}$ und beim überragenden Spindelteile das Verhältnis $\frac{x_{12}}{x_{22}}$ das gleiche. Es mußte auch

$$\frac{x_{11}}{x_{21}} = \frac{x_{12}}{x_{22}} \quad \text{sein.}$$

Da dies nicht zutraf, sollte x_{12} verändert werden. Damit würde sich auch x''_{21} und x''_{22} ändern und sich K berechnen aus

$$\frac{x_{11}}{x'_{21} + x''_{21} \cdot K} = \frac{x_{12} \cdot K}{x'_{22} + x''_{22} \cdot K} .$$

Da x'_{21} und x'_{22} verhältnismäßig sehr klein waren, wurden

$$\text{für } x'_{21} + x''_{21} \cdot K \quad x_{21} \cdot K$$
$$\text{und für } x'_{22} + x''_{22} \cdot K \quad x_{22} \quad K \quad \text{gesetzt.}$$

Daraus ergab sich die Bestimmungsgleichung für K

$$\frac{x_{11}}{x_{21} \cdot K} = \frac{x_{12} \cdot K}{x_{22} \cdot K}$$

oder

$$K = \frac{x_{11} \cdot x_{22}}{x_{21} \cdot x_{12}} = \frac{1{,}110}{1{,}124} = 0{,}988.$$

Nr.	l	r_1	r_2	V	G	G_z	G_{ges}
	cm	cm	cm	cm^3	kg · 10^3	kg · 10^3	kg · 10^3
1	1,50	0,0000	0,2200	0,176	1,38		1,38
2	2,00	0,2200	0,2550	0,356	2,80		2,80
3	2,00	0,2550	0,2900	0,468	3,68		3,68
4	2,00	0,2900	0,3250	0,597	4,70		4,70
5	0,80	0,3250	0,3250	0,266	2,09	16,00	18,09
6	2,00	0,3250	0,3250	0,664	5,22	30,00	35,22
7	1,30	0,3250	0,3550	0,471	3,70	12,00	15,70
8	0,50	0,3550	0,3550	0,199	1,56	6,00	7,56
9	0,70	0,3550	0,3550	0,278	2,18	8,00	10,18
10	2,00	0,3550	0,3366	0,755	5,93		5,93
11	2,00	0,3366	0,3181	0,675	5,30		5,30
12	2,00	0,3181	0,2997	0,602	4,74		4,74
13	2,00	0,2997	0,2812	0,532	4,18		4,18
14	2,00	0,2812	0,2628	0,465	3,66		3,66
15	2,00	0,2628	0,2444	0,407	3,20		3,20
16	2,10	0,2444	0,2250	0,366	2,88		2,88
Gr.	1	2	3	4	5	6	7

G_1 : Maßstab für die Teile zwischen Fuß- und Halslager:

$$1 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg},$$

G_2 : Maßstab für die Teile des überragenden Endes:

$$1 \text{ cm} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

Nr.	F	F · H	l′	r'_1	r'_2	I_m	$\frac{I_0}{I_m}$	F H $\frac{I_0}{I_m}$
	cm^2	$kgcm^2\ 10^3$	cm	cm	cm	cm^4		$kgcm^2\ 10^3$
a	0,05	2,5	0,90	0,0000	0,2100	0,001010	8,680	21,7
b	0,33	16,5	1,65	0,2100	0,2384	0,001997	4,388	72,4
c	0,70	35,0	2,00	0,2384	0,2734	0,003400	2,578	90,3
d	0,75	37,5	2,00	0,2734	0,3084	0,005664	1,547	58,0
e	0,37	18,5	1,35	0,3084	0,3250	0,007970	1,099	20,3
f	0,04	2,0	0,40	0,3250	0,3250	0,008762	1,000	2,0
Gr.	8	9	10	11	12	13	14	15
a′	0,23	23	0,90	0,0000	0,2100	0,001010	8,680	200
b′	1,59	159	1,65	0,2100	0,2384	0,001997	4,388	698
c′	3,98	398	2,00	0,2384	0,2734	0,003400	2,578	1026
d′	6,24	624	2,00	0,2734	0,3084	0,005664	1,547	965
e′	5,46	546	1,35	0,3084	0,3250	0,007970	1,099	600
f′	1,81	181	0,40	0,3250	0,3250	0,008762	1,000	181
g′	4,18	418	1,00	0,3250	0,3250	0,008762	1,000	418
h′	5,35	535	1,70	0,3250	0,3250	0,008762	1,000	535
j′	2,04	204	0,85	0,3550	0,3550	0,012474	0,702	143
k′	1,25	125	0,60	0,3550	0,3550	0,012474	0,702	88
l′	2,36	236	1,35	0,3550	0,3458	0,011920	0,735	174
m′	2,65	265	2,00	0,3458	0,3273	0,010120	0,866	230
n′	1,80	180	2,00	0,3273	0,3089	0,008037	1,090	196
o′	1,10	110	2,00	0,3089	0,2905	0,006419	1,365	150
p′	0,60	60	2,00	0,2905	0,2720	0,004907	1,774	106
q′	0,28	28	2,00	0,2720	0,2536	0,003748	2,338	66
r′	0,08	8	2,05	0,2536	0,2347	0,002801	3,129	25
Gr.	16	17	18	19	20	21	22	23

Polabstand $H_1 = 50 \cdot 10^{-3}$ kg.

Trägheitsmoment $I_0 = 0{,}008762$ cm^4.

$F_1 \cdot H_1 \cdot \frac{I_0}{I_m}$: Maßstab : 1 cm $= 50 \cdot 10^{-3}$ kg cm^2.

Polabstand $H_2 = 100 \cdot 10^{-3}$ kg.

$F_2 \cdot H_2 \cdot \frac{I_0}{I_m}$: Maßstab : 1 cm $= 500 \cdot 10^{-3}$ kg · cm^2.

Nr.	x_o	M_{ges}	C	Nr.	F	F H	$F H \cdot \frac{I_o}{I_m}$
	cm	$\frac{kg \cdot sec^2}{cm} \cdot 10^6$	kg		cm^2	$kg cm^2$	$kg\ cm^2$
1	0,33	1,41	0,47	a	0,09	1,8	15,6
2	0,78	2,86	2,23	b	0,62	12,4	54,5
3	0,97	3,75	3,64	c	1,25	25,0	64,5
4	0,63	4,80	3,03	d	1,20	24,0	37.2
5	0,17	18,46	3,14	e	0,48	9,6	10,6
6	0,44	35,95	15,82	f	0,04	0,8	0,8
7	1,42	16,00	22,72				
8	1,93	7,72	14,90	Gr.	27	28	29
9	2,31	10,40	24,04				
10	3,22	6,05	19,50	a′	0,72	144	1250
11	4,62	5,41	25,00	b′	5,04	1008	4430
12	6,13	4,84	29,65	c′	12,50	2500	6450
13	7,71	4,27	33,00	d′	19,50	3900	6040
14	9,32	3,71	34,60	e′	17,10	3420	3770
15	10,97	3,26	35,80	f′	5,67	1134	1134
16	12,71	2,94	37,40	g′	13,80	2760	2760
				h′	20,10	4020	4020
				j′	8,55	1710	1200
Gr.	24	25	26	k′	5,50	1100	773
				l′	10,90	2180	1603
				m′	12,70	2540	2200
				n′	9,10	1820	1986
				o′	5,90	1180	1611
				p′	3,40	680	1207
				q′	1,70	340	795
				r′	0,51	102	320
				Gr.	30	31	32

Polabstand : $\frac{E\ I_o}{u_1} = \frac{19276,4}{38552,8} = 0,5$ kg cm².

Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 1000$ sec.$^{-1}$

C_1 : Maßstab : 1 cm = 2 kg.

Polabstand $\frac{E\ I_o}{u_2} = \frac{19276,4}{3855,28} = 5$ kg cm².

C_2 : Maßstab : 1 cm = 20 kg.

Polabstand $H_1 = 20$ kg.

$F_1 H_1 \cdot \frac{I_o}{I_m}$: Maßstab : 1 cm = 20 kg cm².

Polabstand $H_2 = 200$ kg.

$F_2 H_2 \cdot \frac{I_o}{I_m}$: Maßstab : 1 cm = 4000 kg · cm².

Nr.	x_1	M_{ges}	C′	Nr.	F	F · H	$F H \cdot \frac{I_0}{I_m}$
	cm	$\frac{kg \cdot sec^2}{cm} 10^6$	kg		cm^2	$kgcm^2$	kg cm^2
1	0,24	1,41	0,34	a	0,07	1,4	12,2
2	0,61	2,86	1,75	b	0,46	9,2	40,4
3	0,70	3,75	2,63	c	0,90	18,0	46,5
4	0,42	4,80	2,02	d	0,85	17,0	26,3
5	0,11	18,46	2,03	e	0,32	6,4	7,0
6	0,40	35,95	14,40	f	0,02	0,4	0,4
7	1,21	16,00	19,40				
8	1,66	7,72	12,82	Gr.	36	37	38
9	2,01	10,40	20,95				
10	2,79	6,05	16,90	a′	0,63	126	1094
11	4,04	5,41	21,85	b′	4,46	892	3920
12	5,42	4,84	26,20	c′	11,10	2220	5740
13	6,86	4,27	29,35	d′	17,30	3460	5350
14	8,38	3,71	31,10	e′	15,20	3040	3350
15	9,93	3,26	32,40	f′	5,05	1010	1010
16	11,58	2,94	34,10	g′	12,30	2460	2460
				h′	17,95	3590	3590
				j′	7,65	1530	1074
Gr.	33	34	35	k′	4,90	980	689
				l′	9,75	1950	1432
				m′	11,40	2280	1975
				n′	8,10	1620	1768
				o′	5,30	1060	1450
				p′	3,10	620	1100
				q′	1,50	300	702
				r′	0,41	82	257
				Gr.	39	40	41

Polabstand $\frac{E I_0}{u_1} = \frac{19276,4}{96,382} = 200$ kg · cm².

Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 1000$ sec^{-1}.

C'_1 : Maßstab : 1 cm = 2 kg.

Polabstand $\frac{E I_0}{u_2} = \frac{19276,4}{0,48191} = 40000$ kg cm².

C'_2 : Maßstab : 1 cm = 20 kg.

Polabstand $H_1 = 20$ kg.

$F_1 H_1 \cdot \frac{I_0}{I_m}$: Maßstab : 1 cm = 20 kg · cm².

Polabstand $H_2 = 200$ kg.

$F_2 H_2 \cdot \frac{I_0}{I_m}$: Maßstab : 1 cm = 40000 kg · cm².

Nr.	x_2	$\frac{x_1}{x_2}$
	cm	
1	0,22	1,090
2	0,55	1,110
3	0,63	1,110
4	0,38	1,110
5	0,10	1,100
6	0,35	1,142
7	1,06	1,139
8	1,46	1,135
9	1,78	1,128
10	2,47	1,126
11	3,58	1,124
12	4,81	1,124
13	6,08	1,124
14	7,42	1,124
15	8,80	1,124
16	10,27	1,124
Gr.	42	43

Polabstand $\frac{E\,I_o}{u_1} = \frac{19276{,}4}{96{,}382} = 200$ kg cm².

Polabstand $\frac{E\,I_o}{u_2} = \frac{19276{,}4}{0{,}48191} = 40000$ kg cm².

Nach Gleichung

$$n_k = \frac{30}{\pi} \cdot \omega_1 \cdot \sqrt{\frac{x_{11}}{x_{21} \cdot K} \cdot u} = \frac{30}{\pi} \cdot \omega_1 \cdot \sqrt{\frac{x_{12}}{x_{22}} \cdot u}$$

berechnete sich die kritische Drehzahl für die Ringspindel 3 etwa zu

$$n_k = \frac{30}{\pi} \cdot 1000 \cdot \sqrt{\frac{1{,}110}{0{,}988} \cdot 0{,}48191} = \frac{30}{\pi} \cdot 1000 \cdot \sqrt{1{,}124 \cdot 0{,}48191}$$

$$n_k = \frac{30}{\pi} \cdot 1000 \cdot \sqrt{0{,}542} = \frac{30}{\pi} \cdot 1000 \cdot \sqrt{0{,}542}$$

$$n_k = 7030 \text{ Umdr./min.}$$

b) Versuchswerte.

Die kritische Drehzahl der Spindel wurde bei etwa folgenden Werten beobachtet:

Beginn	Maximum	Ende
5000 Umdr./min.	7080 Umdr./min.	9000 Umdr./min.

Die größten Spindelausschläge (Abb. 14), die etwa 1 cm unter der Spindelspitze gemessen werden konnten, betrugen etwa 0,30 mm.

Ringspindel 3 mit einer Holzhülse belastet.

a) Der Gang des zeichnerischen Verfahrens war derselbe wie bei der Ringspindel 3 ohne Hülse (siehe dazu Blatt 2, Kurven A, B und N bis W).

Die Momentenfläche A und die Biegungslinie B dienten beiden Beispielen. Die Anfangsdurchbiegungen x_0 ergaben sich aus den Ordinaten der Biegungslinie B und O. Die Fliehkräfte C_1 und C_2 (Gruppe 26) als Belastungen gedacht, führten zu den Durchbiegungen x_1 (bzw. x_{11} und x_{12}). Da das Verhältnis $\frac{x_0}{x_1}$ nicht überall gleich war, folgte eine Wiederholung des Verfahrens. Zwischen Fuß- und Halslager war das Verhältnis $\frac{x_{11}}{x_{21}}$ und beim überragenden Spindelteile das Verhältnis $\frac{x_{12}}{x_{22}}$ überall dasselbe. Es ergab sich

$$K = \frac{x_{11} \cdot x_{22}}{x_{21} \cdot x_{12}} = \frac{0{,}900}{0{,}873} = 1{,}03$$

Nr.	G	G_z	G_{ges}	Nr.	F	F · H	$F \cdot H \cdot \frac{I_o}{I_m}$
	kg · 10^3	kg · 10^3	kg · 10^3		cm^2	kg$cm^2 \cdot 10^3$	kg $cm^2 \cdot 10^3$
1	1,38		1,38	a	0,05	2,5	21,7
2	2,80		2,80	b	0,33	16,5	72,4
3	3,68		3,68	c	0,70	35,0	90,3
4	4,70		4,70	d	0,75	37,5	58,0
5	2,09	16,00	18,09	e	0,37	18,5	20,3
6	5,22	30,00	35,22	f	0,04	2,0	2,0
7	3,70	12,00	15,70				
8	1,56	6,00	7,56	Gr.	8	9	15
9	2,18	11,00	13,18				
10	5,93	5,42	11,35	a′	0,34	34	295
11	5,30	1,52	6,82	b′	2,35	235	1030
12	4,74	1,42	6,16	c′	5,80	580	1496
13	4,18	1,32	5,50	d′	8,90	890	1378
14	3,66	1,22	4,88	e′	7,76	776	855
15	3,20	1,12	4,32	f′	2,58	258	258
16	2,88	4,50	7,38	g′	6,05	605	605
				h′	8,13	813	813
				j′	3,21	321	225
Gr.	5	6	7	k′	1,98	198	139
				l′	3,75	375	276
				m′	4,25	425	368
				n′	3,00	300	327
				o′	2,00	200	273
				p′	1,25	125	222
				q′	0,65	65	152
				r′	0,21	21	66
				Gr.	16	17	23

G_1 : Maßstab : 1 cm $= 5 \cdot 10^{-3}$ kg.

G_2 : Maßstab : 1 cm $= 10 \cdot 10^{-3}$ kg.

Polabstand $H_1 = 50 \cdot 10^{-3}$ kg.

$F_1 \cdot H_1$: Maßstab : 1 cm $= 50 \cdot 10^{-3}$ kg cm^2.

Polabstand $H_2 = 100 \cdot 10^{-3}$ kg.

$F_2 \cdot H_2 \cdot \frac{I_o}{I_m}$: Maßstab : 1 cm = 1 kg.

Nr.	x_0	M_{ges}	C	Nr.	F	F . H	$F H . \frac{I_0}{I_m}$
	cm	$\frac{kg \cdot sec^2}{cm} \cdot 10^6$	kg		cm^2	$kg cm^2$	$kg cm^2$
1	0,23	1,41	0,33	a	0,13	1,3	11,3
2	0,58	2,86	1,66	b	0,85	8,5	37,3
3	0,67	3,75	2,51	c	1,75	17,5	45,2
4	0,44	4,80	2,11	d	1,70	17,0	26,4
5	0,11	18,46	2,03	e	0,64	6,4	7,0
6	0,32	35,95	11,50	f	0,05	0,5	0,5
7	1,00	16,00	16,00				
8	1,38	7,72	10,65	Gr.	27	28	29
9	1,65	13,44	22,20				
10	2,28	11,58	26,40	a′	0,41	164	1423
11	3,30	6,96	23,00	b′	2,93	1172	5150
12	4,44	6,29	27,95	c′	7,35	2940	7590
13	5,61	5,62	31,50	d′	11,40	4560	7080
14	6,78	4,98	33,80	e′	9,96	3984	4385
15	8,05	4,41	35,50	f′	3,30	1320	1320
16	9,35	7,53	70,50	g′	8,08	3232	3232
				h′	12,00	4800	4800
				j′	5,22	2088	1469
Gr.	24	25	26	k′	3,38	1352	952
				l′	6,75	2700	1984
				m′	8,10	3240	2808
				n′	5,95	2380	2596
				o′	4,05	1620	2215
				p′	2,55	1020	1810
				q′	1,35	540	1264
				r′	0,41	164	514
				Gr.	30	31	32

Polabstand $\frac{E I_0}{u_1} = \frac{19276,4}{38552,8} = 0,5$ kg cm²

C_1 : Maßstab : 1 cm = 1 kg.

Polabstand $\frac{E I_0}{u_2} = \frac{19276,4}{1927,64} = 10$ kg cm².

C_2 : Maßstab : 1 cm = 40 kg.

Polabstand $H_1 = 10$ kg.

$F_1 \cdot H_1 \cdot \frac{I_0}{I_m}$: Maßstab : 1 cm = 20 kg cm².

Polabstand $H_2 = 400$ kg.

$F_2 \cdot H_2 \cdot \frac{I_0}{I_m}$: Maßstab : 1 cm = 5000 kg cm².

Nr.	x_1	M_{ges}	C′	Nr.	F	F . H	$F H \frac{I_0}{I_m}$
	cm	$\frac{kg \cdot sec^2}{cm} 10^6$	kg		cm^2	$kgcm^2$	kg cm^2
1	0,27	1,41	0,38	a	0,14	1,4	12,2
2	0,61	2,86	1,75	b	0,91	9,1	39,9
3	0,72	3,75	2,70	c	1,85	18,5	47,7
4	0,46	4,80	2,21	d	1,80	18,0	27,8
5	0,12	18,46	2,22	e	0,70	7,0	7,7
6	0,30	35,95	10,8	f	0,06	0,6	0,6
7	1,04	16,00	16,7				
8	1,46	7,72	11,3	Gr.	36	37	38
9	1,78	13,44	23,9				
10	2,51	11,58	29,1	a′	0,50	200	1736
11	3,67	6,96	25,6	b′	3,43	1372	6030
12	4,97	6,29	31,3	c′	8,45	3380	8720
13	6,29	5,62	35,4	d′	13,15	5260	8140
14	7,71	4,98	38,4	e′	11,60	4640	5100
15	9,22	4,41	40,6	f′	3,83	1532	1532
16	10,82	7,53	81,7	g′	9,35	3740	3740
				h′	13,95	5580	5580
Gr.	33	34	35	j′	6,10	2440	1710
				k′	3,94	1576	1106
				l′	7,90	3160	2320
				m′	9,50	3800	3290
				n′	7,10	2840	3096
				o′	5,00	2000	2730
				p′	3,10	1240	2200
				q′	1,60	640	1497
				r′	0,53	212	664
				Gr.	39	40	41

Polabstand $\frac{E \cdot I_0}{u_1} = \frac{19276,4}{96,382} = 200$ kg cm^2.

C_1 : Maßstab : 1 cm = 1 kg.

Polabstand $\frac{E \cdot I_0}{u_2} = \frac{19276,4}{0,385528} = 50\,000$ kg cm^2.

C_2 : Maßstab : 1 cm = 40 kg.

Polabstand $H_1 = 10$ kg.

$F_1 \cdot H_1 \cdot \frac{I_0}{I_m}$: Maßstab : 1 cm = 20 kg cm^2.

Polabstand $H_2 = 400$ kg.

$F_2 \cdot H_2 \cdot \frac{I_0}{I_m}$: Maßstab : 1 cm = 5000 kg cm^2.

Nr.	x_2	$\frac{x_1}{x_2}$
	cm	
1	0,30	0,900
2	0,68	0,900
3	0,80	0,900
4	0,51	0,900
5	0,13	0,923
6	0,34	0,883
7	1,19	0,874
8	1,67	0,874
9	2,04	0,873
10	2,87	0,873
11	4,20	0,873
12	5,69	0,873
13	7,20	0,873
14	8,84	0,873
15	10,57	0,873
16	12,41	0,873
Gr.	42	43

Polabstand $\frac{E\,I_0}{u_1} = \frac{19276{,}4}{96{,}382} = 200$ kg cm².

Polabstand $\frac{E\,I_0}{u_2} = \frac{19276{,}4}{0{,}385528} = 50\,000$ kg cm².

und die kritische Drehzahl für die Ringspindel 3 mit Hülse etwa zu

$$n_k = \frac{30}{\pi} \cdot 1000 \cdot \sqrt{\frac{0{,}900}{1{,}03} \cdot 0{,}385528} = \frac{30}{\pi} \cdot 1000 \cdot \sqrt{0{,}873 \cdot 0{,}385582}$$

$$n_k = \frac{30}{\pi} \cdot 1000 \cdot \sqrt{0{,}3366} = \frac{30}{\pi} \cdot 1000 \cdot \sqrt{0{,}3366}$$

$$n = 5540 \text{ Umdr./min.}$$

b) Die Versuchswerte für die kritische Drehzahl waren etwa:

Beginn	Maximum	Ende
4200 Umdr./min.	5540 Umdr./min.	7200 Umdr./min.

Die Spindelausschläge (Abb. 14) — etwa 1,2 cm unter der Hülsenspitze gemessen, d. i. etwa 1 cm unter der Spindelspitze — erreichten eine Größe von etwa 0,43 mm.

Ringspindel 4.

Ihre Hauptabmessungen ergeben sich aus Abb. 15. Das Lagerspiel betrug 0,02 mm. Die Spindel war im Betriebe noch nicht verwandt worden.

a) Die kritische Drehzahl errechnete sich für diese Spindel etwa zu

$$n_k = 7160 \text{ Umdr./min.}$$

b) der Versuch ergab n_k etwa bei:

Beginn	Maximum	Ende
5800 Umdr./min.	7200 Umdr./min.	7200 Umdr./min.

Die größten Spindelausschläge (Abb. 16), die etwa 2 cm unter der Spindelspitze gemessen werden konnten, hatten eine Weite von 0,73 mm.

Bei dieser Spindel fand nach Erreichung des Maximus der kritischen Drehzahl kein allmähliches Abnehmen sondern ein sofortiges Aufhören der Ausschläge statt. Der plötzliche Wechsel vom unruhigsten zum ruhigsten Spindellauf wird dadurch zu erklären versucht, daß bei dieser Spindel für die Schwingungsgleichung die lineare Funktion der Durchbiegung nicht mehr genügt, diese vielmehr in Abhängigkeit zu den Ausschlägen ein-

gesetzt werden müßte ähnlich wie bei den Euler-Formeln für Knickung oder bestimmten Erscheinungen bei der Laval-Welle. Diese Erklärung erscheint um so wahrscheinlicher zu sein, als auch hier bei der Spindel wie dort bei der Laval-Welle beim Durchlaufen der kritischen Drehzahlen von einer höheren Umdrehungzahl als der kritischen aus die maximalen Ausschläge, die beim umgekehrten Durcheilen gemessen werden, nicht erreicht werden. Bei dieser Ringspindel konnten beim Rückwärtsdurchlaufen der kritischen Drehzahl nur erheblich kleinere Ausschläge festgestellt werden.

Ringspindel 5.

Abb. 17 zeigt die Hauptabmessungen dieser Spindel. Sie bestand aus zwei verschiedenen Metallen, der obere Teil aus einer Aluminiumlegierung, der untere aus Stahl. Das Lagerspiel betrug 0,02 mm. In einem Betriebe war die Spindel noch nicht gelaufen.

a) Die kritische Drehzahl war für diese Spindel ermittelt worden etwa zu

$$n_k = 4940 \text{ Umdr./min.}$$

b) Im Versuch zeigte sich die kritische Drehzahl etwa bei den Werten:

Beginn	Maximum	Ende
3950 Umdr./min.	5000 Umdr./min.	5900 Umdr./min.

Die größten Spindelausschläge (Abb. 18) — etwa 2 cm unter der Spindelspitze gemessen — hatten etwa eine Weite von 0,37 mm.

Bei den Ringspindeln mit einem Rollenlager als Halslager und einem Gleitlager als Fußlager wurde noch die

durch den Versuch festgestellt. Es ergab sich etwa bei

Ringspindel 3 ohne Hülse . . . $n_{k_2} = 33600$ Umdr./min.
Ringspindel 4 . . . . . $n_{k_2} = 30000$ Umdr./min.
Ringspindel 5 . . . . . $n_{k_2} = 22800$ Umdr./min.

Ringspindel 5 hatte eine 3. kritische Drehzahl etwa bei
$n_{k_3} = 26400$ Umdr./min.

IV. Zusammenfassung.

Die Versuchsergebnisse zeigen, daß sich die kritische Drehzahl von Ringspindeln nach dem entwickelten Verfahren ermitteln läßt. Die Ergebnisse bestätigen auch annähernd die Richtigkeit der Annahme, die Ringspindeln mit einem Gleitlager als Hals- und Fußlager als eingespannt mit Drehfreiheit zu betrachten und die Ringspindeln mit einem Rollenlager als Halslager und einem Gleitlager als Fußlager als auf zwei Lagern frei aufliegend mit überragendem Ende zu behandeln. Die kritische Drehzahl lag bei den untersuchten Ringspindeln mit einem Gleitlager als Hals- und Fußlager bedeutend höher als bei den untersuchten Spindeln mit einem Rollenlager als Halslager und einem Gleitlager als Fußlager. Wie sich aus mehreren Berechnungen ergab, hängt die Höhe der kritischen Drehzahl neben den Lagerverhältnissen vor allem von der Länge und der Gestalt des über das Halslager ragenden Spindelteiles ab. Je kürzer dieser Teil ist, je steiler der Durchmesser am Halslager ansteigt und je größer das Verhältnis Trägheitsmoment/Masse ist, desto höher liegt die kritische Drehzahl. Wichtig ist ferner für eine hohe kritische Drehzahl, daß die Spindel beim Austritt aus dem oberen Halslagerende sofort so stark wie möglich gemacht wird. Millimeter in der Länge und im Durchmesser spielen bereits eine große Rolle dabei.

Eine Durchmesserverkleinerung des konischen oberen Teiles der Ringspindel 4 um nur 1,0 mm im Maximum nach Abb. 19 (bedeutet ein steileres Ansteigen des Durchmessers am Halslager) ergibt eine Erhöhung der kritischen Drehzahl um annähernd 950 Umdr./min. von n = 7160 Umdr./min. auf 8110 Umdr./min., eine Durchmesservergrößerung um 0,2 mm im Maximum nach Abb. 19 (bedeutet ein Verflachen des Anstiegs des Durchmessers am Halslager) eine Herabsetzung der kritischen Drehzahl um 100 Umdr./min. von n = 7160 Umdr./min. auf 7060 Umdr./min.

Wählt man ein großes Verhältnis Trägheitsmoment/Masse, so muß man dabei beachten, daß nicht ein kleiner Elastizitätsmodul die Größe des Verhältnisses wieder mindert.

V. Literaturangabe.

Bergmann, J.: Handbuch der Spinnerei. 1927.

Borowicz, v. W.: Beitrag zur Berechnung der kritischen Geschwindigkeiten von zwei- und mehrfach gelagerten Wellen. Diss. 1915.

Brown, Boveri & Co.: Mitteilungen. Jahrg. 1920 und Jahrg. 1921.

Duffing, G.: Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. 1918.

Föppl, A.: Vorlesungen über technische Mechanik. 1927.

Geiger, J.: Mechanische Schwingungen und ihre Messung. 1927.

Glafey, H.: Spinnerei und Zwirnerei. 1928.

Hayashi, Keiicchi,: Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen und deren Produkte sowie der Gammafunktionen. 1926.

Holzer, H.: Die Berechnung der Drehschwingungen. 1921.

Hort, W.: Die Differentialgleichungen des Ingenieurs. 1914. — Technische Schwingungslehre. 1922.

Hülsen, M.: Beiträge zur Frage der Schwankungen der Garnnummern. Diss. 1918.

Hütte: Des Ingenieurs Taschenbuch. Bd. 1. 1925.

Kirchhoff, G.: Gesammelte Abhandlungen. 1882.

Leipziger Monatsschrift für Textilindustrie. Jg. 1900; 1909—1911; 1927.

Lindner, G.: Spinnerei und Weberei. 1914.

Melliand Textilberichte, Heidelberg. Jahrg. 1930.

Preu, R.: Die Kammgarnspinnerei. 1920.

Rohn, G.: Die Spinnerei. 1910.

Schneider, E.: Mathematische Schwingungslehre. 1924.

Stein, G.: Die Theorie der Ringspinnmaschine und ihre Auswirkung auf die Geschwindigkeitsreglung und die Produktion. Diss. 1927.

Steuding, H.: Messung mechanischer Schwingungen. 1928.

Stiel, W.: Elektrobetrieb in der Textilindustrie. 1930.

Stodala, A.: Dampf- und Gasturbinen. 1922.

Taggart-Bauer: Die Baumwollspinnerei. 1914.

Textile Forschung. Jahrg. 1926—1928.

Timošenko-Lessels: Festigkeitslehre. 1928.

— Schwingungsprobleme der Technik. 1932.

Zeitschrift für die gesamte Textilindustrie. Jahrg. 1925—1927.

Lebenslauf.

Ich, Georg Scheithauer, wurde am 20. April 1905 als Sohn des Polizei-Hauptwachtmeisters Josef Scheithauer und seiner Ehefrau Maria zu Dambrau in Ober-Schlesien geboren. Von Ostern 1911 bis Ostern 1915 besuchte ich die Volksschule, darauf das Gymnasium zu Glatz. Nach bestandener Reifeprüfung im März 1924 praktizierte ich in einer Maschinenfabrik und begann im Herbst desselben Jahres mein Studium an der Technischen Hochschule zu Breslau. Im Herbst 1928 bestand ich die Diplom-Hauptprüfung als Maschinen-Ingenieur und im Herbst 1929 die Zusatzprüfung als Elektro-Ingenieur. Danach arbeitete ich bei Herrn Prof. Krauß an der Techn. Hochschule zu Breslau an vorliegender Dissertation.

Abb. 1.

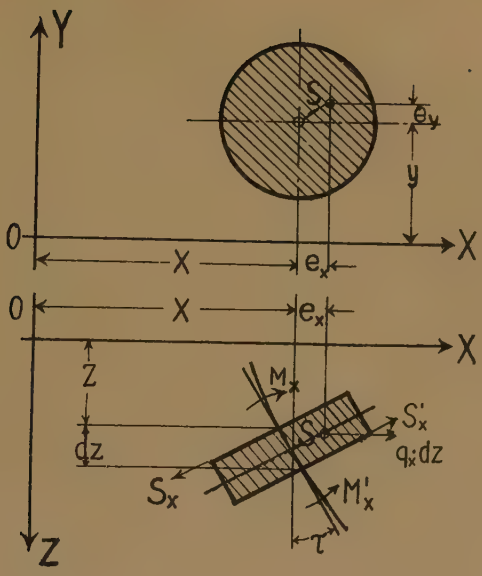


Abb. 2.

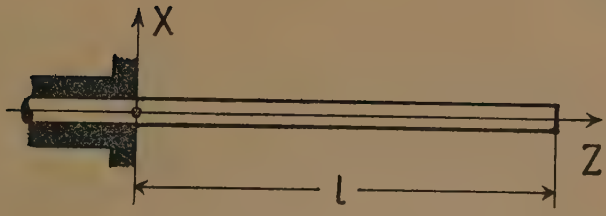


Abb. 3.

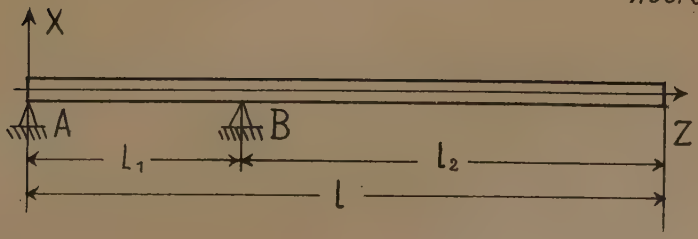


Abb. 4.

kl_2 in Abhängigkeit von kl_1 für $\Delta = 0$

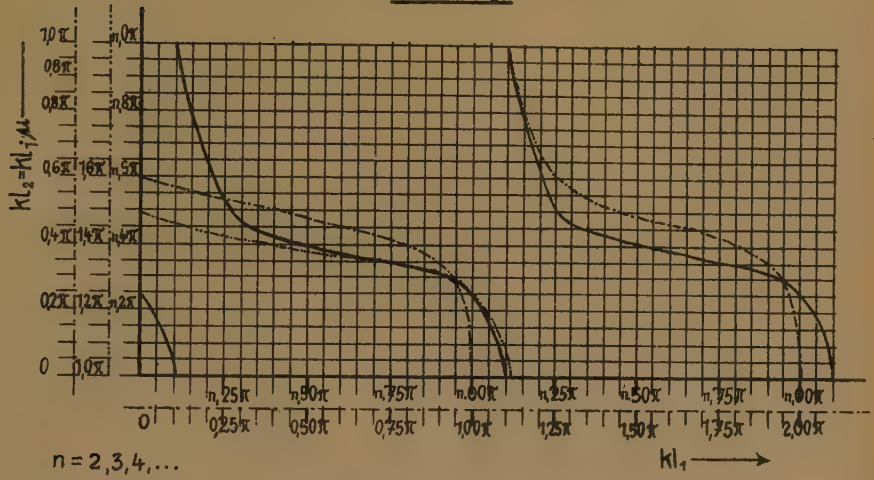
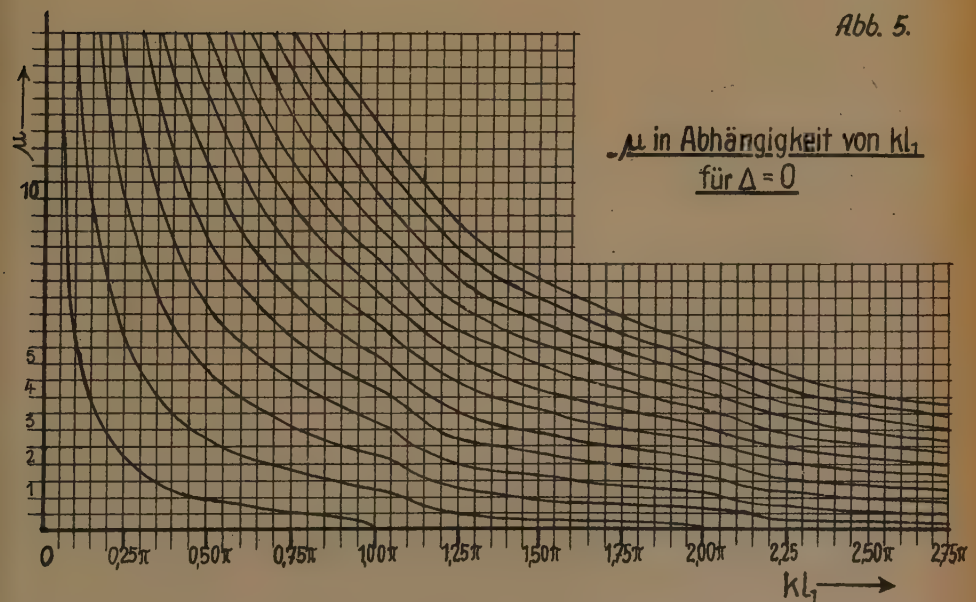


Abb. 5.

μ in Abhängigkeit von kl_1 für $\Delta = 0$



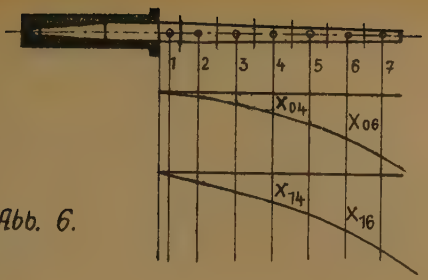


Abb. 6.

Abb. 7

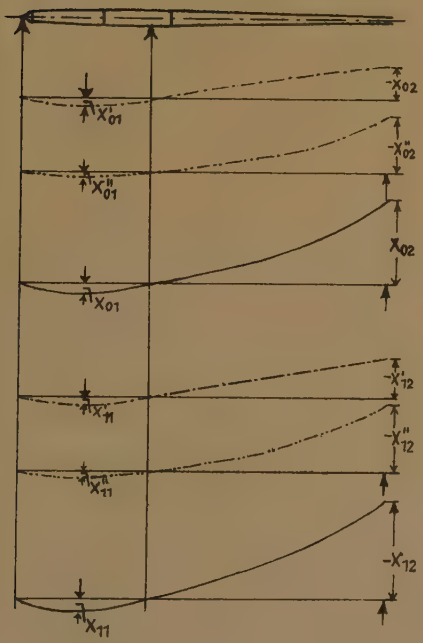


Abb. 8.

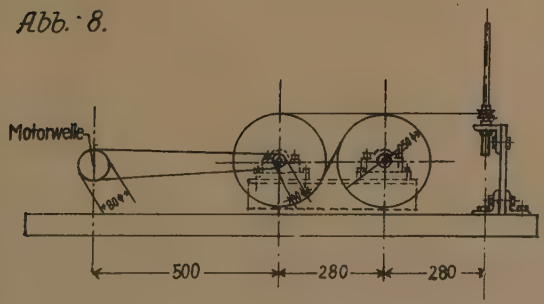
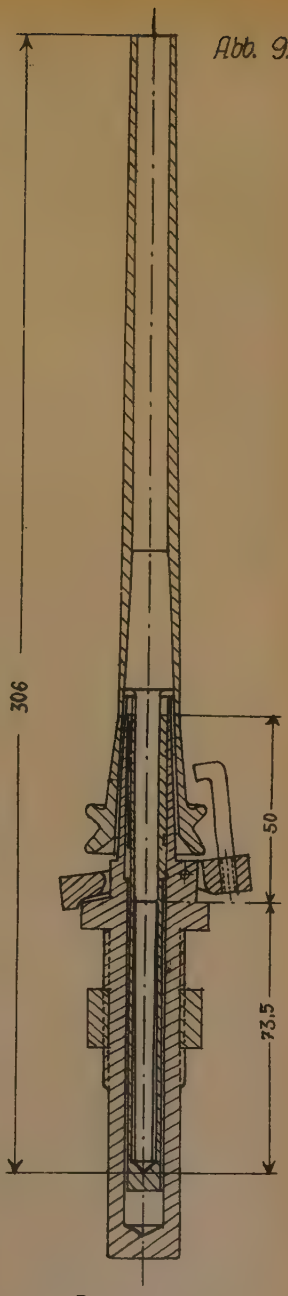


Abb. 9.



Ringspindel 1.

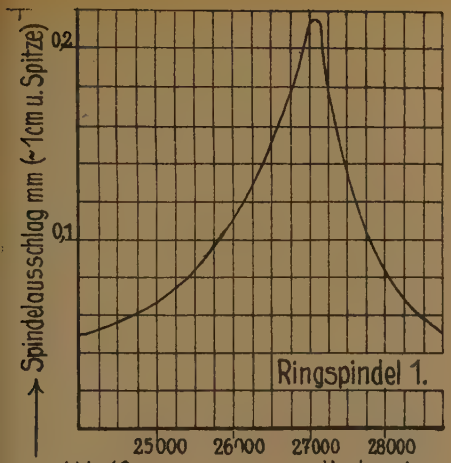


Abb. 10.

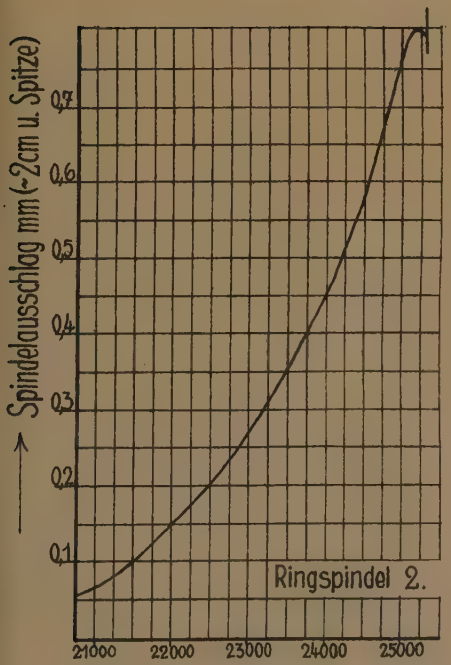


Abb. 12.

Ringspindel 2

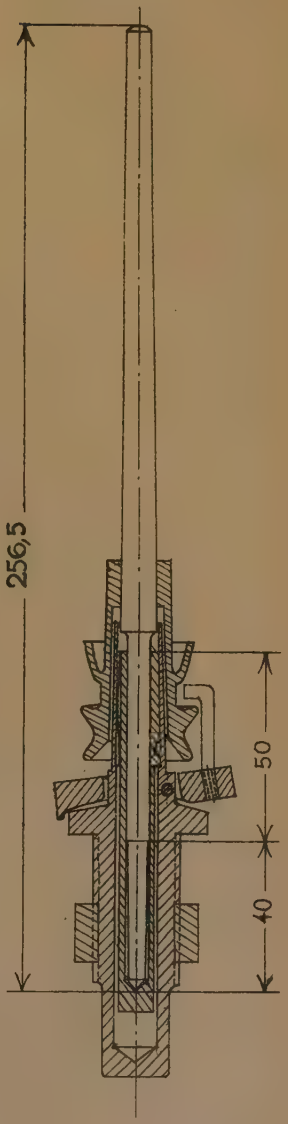


Abb. 11.

Abb. 14.

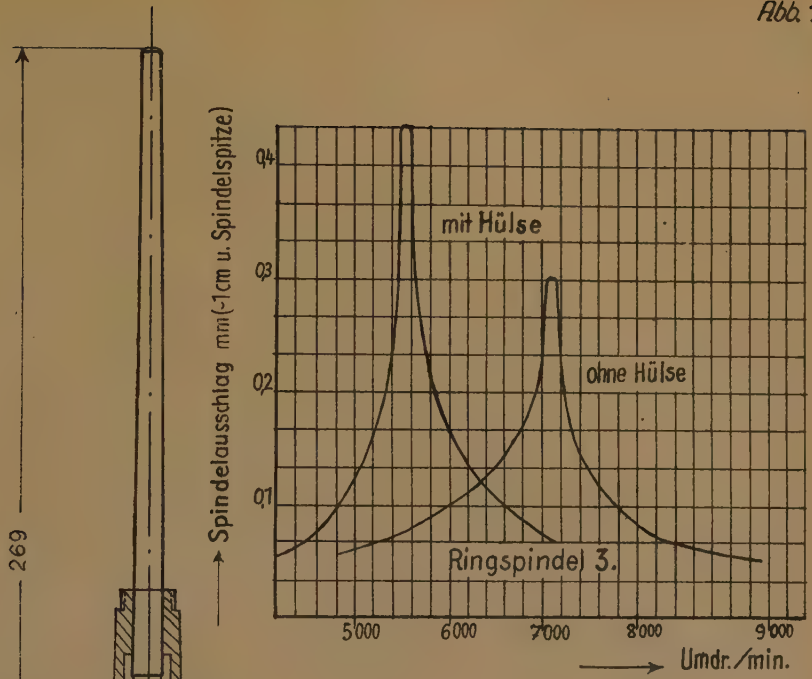
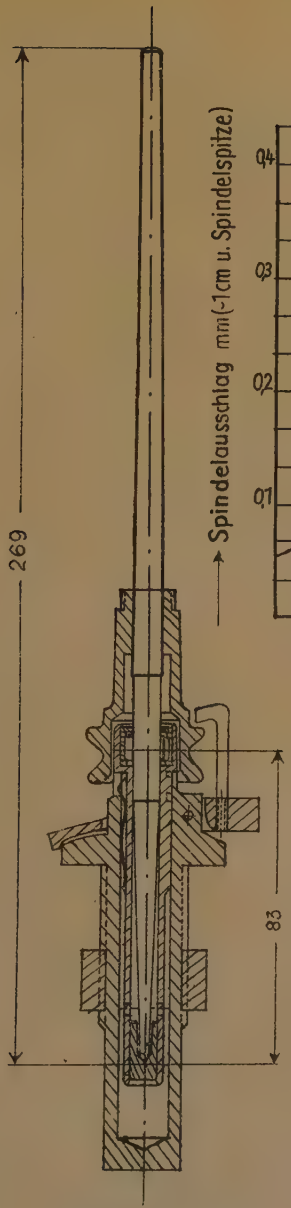


Abb. 13.



Ringspindel 3.

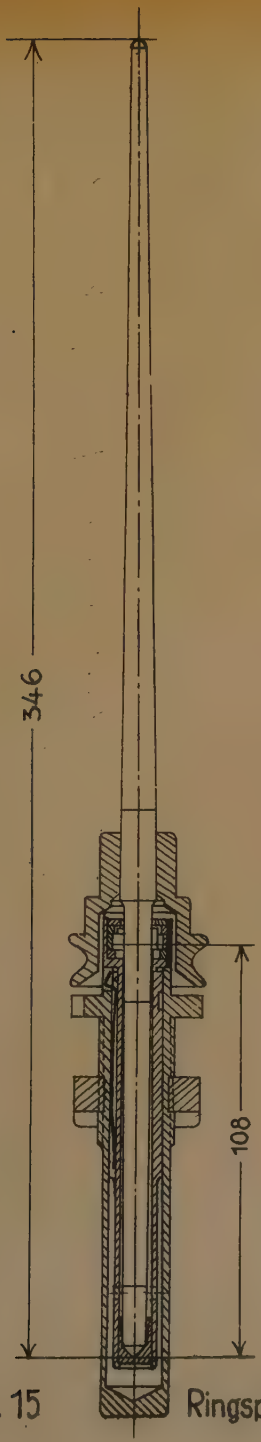


Abb. 15 Ringspindel 4

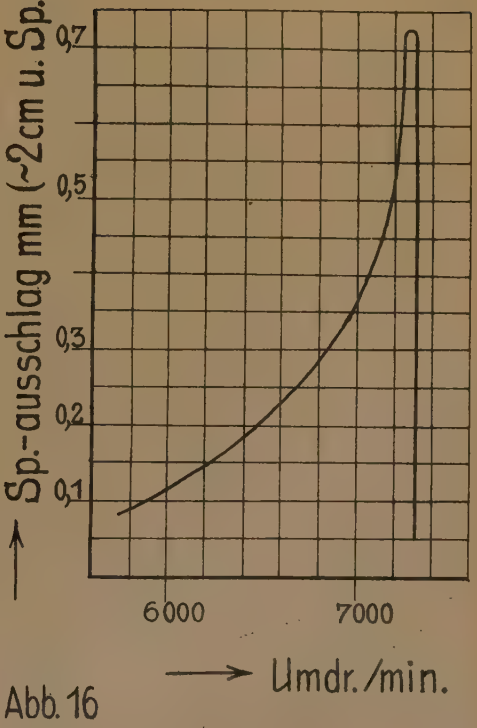


Abb. 16

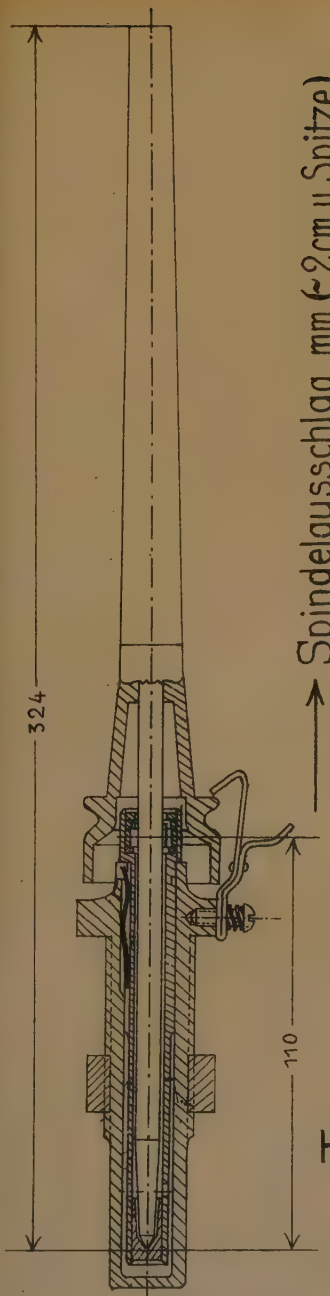


Abb. 17 Ringspindel 5.

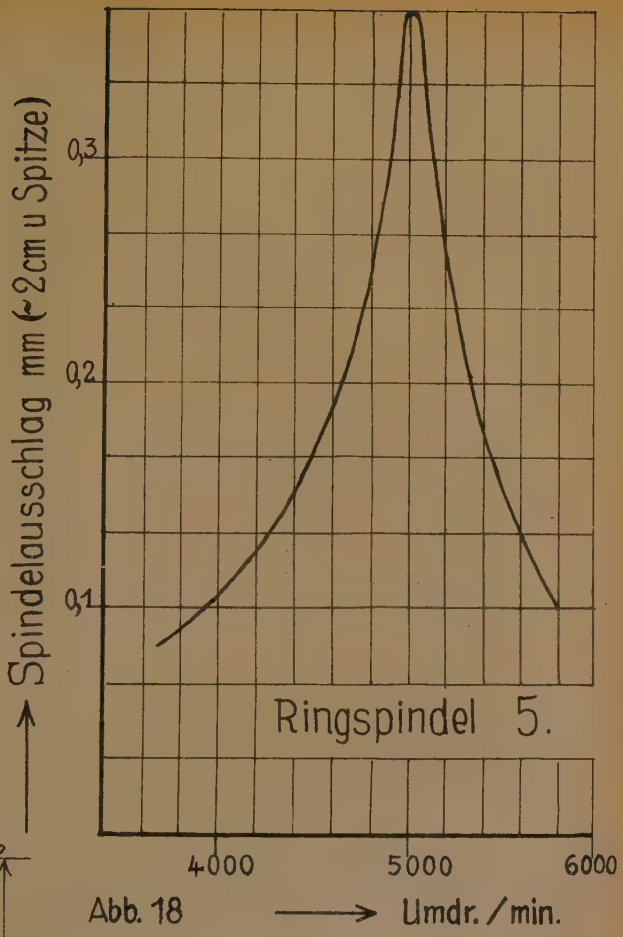


Abb. 18

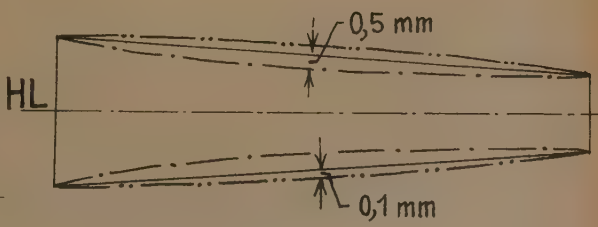
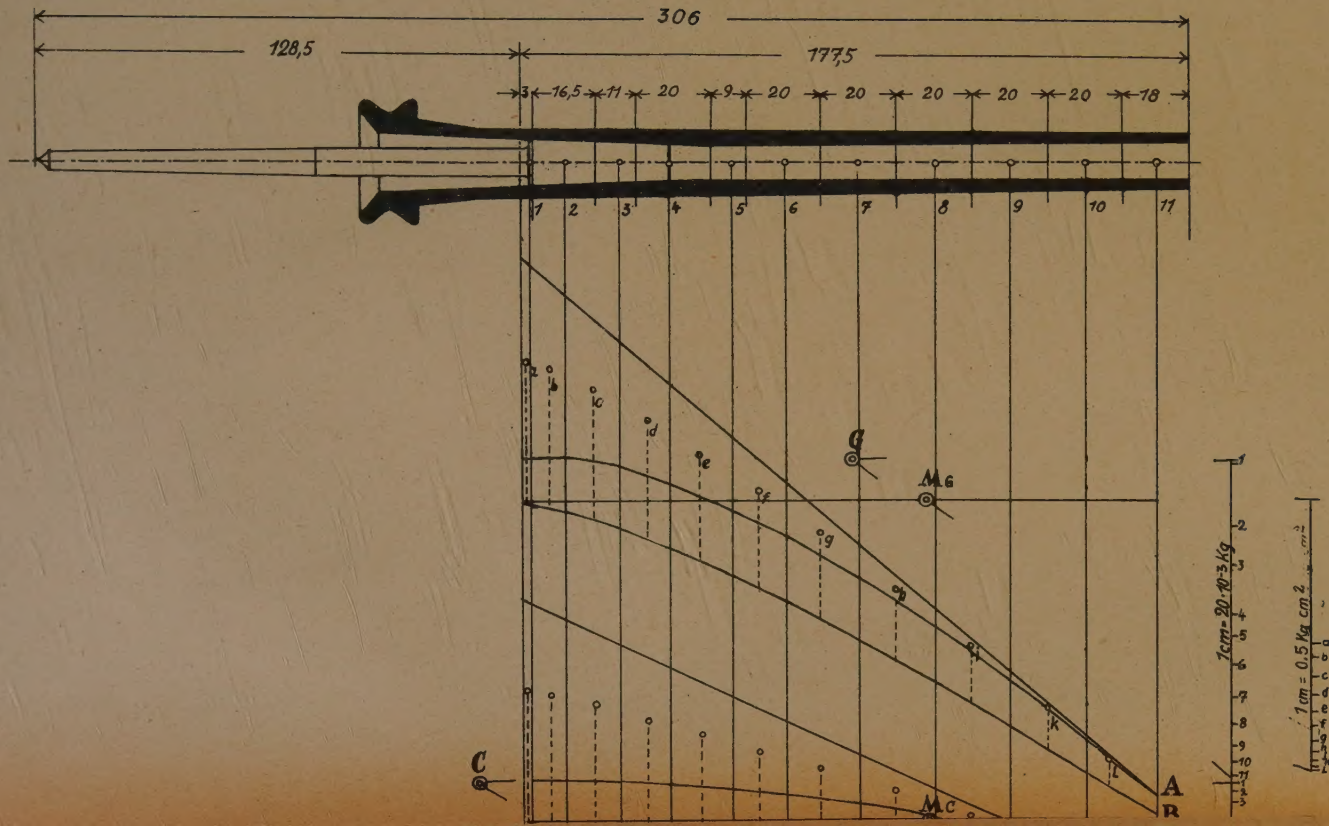


Abb. 19


306
128,5
177,5
3
16,5
11
20
9
20
20
20
20
20
18
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
G
MG
C
MC
A
B
1cm=20·10³Kg
1cm=0,5 Kg cm²

Blatt 1.